UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA

JANEZ PUNTAR

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK: PRIMERI IN PROTIPRIMERI

DIPLOMSKO DELO

Ljubljana, 2018

UNIVERZA V LJUBLJANI

PEDAGOŠKA FAKULTETA

ŠTUDIJSKI PROGRAM: DVOPREDMETNI UČITELJ

SMER: MATEMATIKA - RAČUNALNIŠTVO

KANDIDAT: JANEZ PUNTAR

MENTOR: IZR. PROF. DR. MARKO SLAPAR

SOMENTOR: AS. DR. TADEJ STARČIČ

FUNKCIJE VEČ SPREMENLJIVK: PRIMERI IN PROTIPRIMERI

DIPLOMSKO DELO

Ljubljana, 2018

Zahvala
Zahvaljujem se svojemu mentorju izr. prof. dr. Marku Slaparju in somentoru as. dr. Tadeju Starčiču za ves vložen čas, ki sta mi ga namenila in za strokovne nasvete pri pisanju diplomske naloge.

Še posebej se zahvaljujem punci Špeli in moji družini, ki so mi v vseh letih študija stali ob strani, me podpirali in spodbujali.

Povzetek

V diplomskem delu obravnavamo osnovne lastnosti funkcij več spremenljivk. Osredotočimo se na zveznost, parcialno odvedljivost, Schwarzov izrek in diferenciabilnost funkcij. Na primerih bomo ilustrirali, da zveznost in parcialna odvedljivost nista zgolj preprosti posplošitvi analognih pojmov pri funkcijah ene spremenljivke in s primeri ilustrirali Schwarzov izrek. Pokazali bomo, da je zveznost parcialnih odvodov zadosten pogoj za diferenciabilnost, ni pa potreben.

Ključne besede: funkcije več spremenljivk, parcialni odvodi, Schwarzov izrek, diferenciabilnost

Abstract

In the Diploma thesis we discuss the basic properties of functions of several variables. We focus on continuity, partial derivatives, Schwarz's theorem and differentiablaty. We present examples that illustrate that continuity and partial differentiation are not merely simple generalizations of analogous terms in the theory of functions of one variable. We also use examples to illustrate Schwarz's theorem. We show that continuity of partial derivatives is a sufficient but not necessary condition for differentiability.

Keywords: functions of several variables, partial derivatives, Schwarz's theorem, differentiability

Kazalo

POGLAVJE 1

Uvod

Za razliko od vektorskih funkcij se zveznost funkcij več realnih spremenljivk ne more prevesti zgolj na eno dimenzionalni problem. Podobno je tudi z odvedljivostjo. Problem, s katerim se bom ukvarjal v diplomski nalogi je predvsem najti zanimive primere in protiprimere glede zveznosti in odvedljivosti funkcij več realnih spremenljivk.

V prvem delu diplome najprej predstavimo teoretično ozadje preslikav in $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$ in funkcij več realnih spremenljivk. V nadaljevanju bomo definirali limito funkcij več realnih spremenljivk in koncept zveznosti, ki ga bomo ilustrirali z zanimivimi primeri, ki bodo pokazali nekatere razlike med konceptom zveznosti v eni in v več spremenljivkah. Med drugim bomo podali primere funkcij, ki niso zvezne v neki točki, vendar je njihova zožitev na vsako premico skozi to točko zvezna. Kasneje bomo definirali parcialne odvode funkcij več spremenljivk in prav tako na primerih pokazali nekatere razlike med parcialno odvedljivostjo in odvedljivostjo funkcij ene spremenljivke. Dokazali bomo Schwarzov izrek, ki nam pove, da pod določenimi predpostavkami odvodi višjega reda komutirajo in izrek ilustrirali s primeri. V zadnjem poglavju bomo definirali diferencial funkcije več spremenljivk in pokazali primer diferenciabilne funkcije, ki ima nezvezne parcialne odvode in primer nediferenciabilne funkcije z zveznimi parcialnimi odvodi.

POGLAVJE 2

O prostoru $\mathbb{R}^n$

Glavni viri tega poglavja so [**1**], [**4**], [**6**].

Prostor $\mathbb{R}^n$ sestavljajo urejene $n-$terice realnih števil $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Definirajmo operaciji seštevanja elementov iz $\mathbb{R}^n$ in množenja elementov iz $\mathbb{R}^n$ z realnimi števili na množici $\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n}$ urejenih $n-$teric $(x_1, \ldots, x_n)$. Za $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ in $\beta \in \mathbb{R}$ naj velja

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$\beta \cdot x = (\beta x_1, \ldots, \beta x_n).$$

Operaciji zadoščata aksiomom vektorskega prostora, tako $\mathbb{R}^n$ postane $n-$razsežni vektorski prostor z ničelnim elementom $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Običajno za bazo prostora $\mathbb{R}^n$ vzamemo kar standardno bazo

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Opišimo še *standardni skalarni produkt*

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

in inducirano *standardno normo*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Ta norma nam na $\mathbb{R}^n$ inducira *standardno metriko*

$$d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2},$$

s katero merimo razdaljo med točkami.

Definirajmo okolico poljubne točke v $\mathbb{R}^n$.

Definicija 2.1. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Tedaj rečemo, da je ε-okolica točke a množica točk $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, ki zadoščajo neenačbi

$$\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon.$$

V $\mathbb{R}^3$ je to krogla (brez roba), v $\mathbb{R}^2$ pa krog (brez roba), s polmerom ε. Za ε-okolico točke a bomo uporabljali oznako $K_\varepsilon(a)$.

Definirajmo lego točke glede na območje D s pomočjo ε-okolice.

Definicija 2.2. Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^n$.

- Točka $x \in D$ je **notranja točka** množice D, če je katera njena ε-okolica vsebovana v D.
- Točka $x \in D$ je **zunanja točka** množice D, če kakšna njena ε-okolica ne seka množice D.
- Točka $x \in D$ je **robna točka** množice D, če vsaka njena ε-okolica vsebuje tako točke iz D kot tudi točke izven D.

Definicija 2.3. Množica $D \subset \mathbb{R}^n$ je **odprta množica**, če je vsaka točka množice D notranja. Množica $F \subset \mathbb{R}^n$ je **zaprta množica**, če vsebuje vse svoje robne točke.

V $\mathbb{R}^2$ je krog brez roba odprta množica, krog z robom pa ne. Podobno velja tudi v $\mathbb{R}^3$ za kroglo.

2.1. Preslikave iz $\mathbb{R}^n$ v $\mathbb{R}^m$

Preslikave, katerih zaloga vrednosti je vsebovana v $\mathbb{R}$, običajno imenujemo funkcije. Naj bo torej $D \subset \mathbb{R}^n$. Preslikavo $f : D \to \mathbb{R}$ imenujemo funkcija, definirana na D. Funkcija $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je podana s predpisom, ki vsaki točki $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ priredi natanko določeno število $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. Množica D je definicijsko območje funkcije f. Če definicijsko območje ni posebej podano, je to največja množica, za katero je funkcija f smiselno definirana.

V primeru dveh funkcij n-spremenljivk z istim definicijskim območjem, lahko poleg vsote dveh funkcij definiramo tudi njun produkt in kvocient (kvocient ni definiran v točkah, kjer delimo z 0). Funkcije, definirane v neki $D \subset \mathbb{R}^n$, torej tvorijo komutativen kolobar z enoto.

Naj bo sedaj $D \subset \mathbb{R}^n$ in $f : D \to \mathbb{R}^m$ preslikava. Za vsak $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ obstaja

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$$

ki je natančno določen. Vsaka od koordinat

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

predstavlja funkcijo $n-$spremenljivk, ki je definirana na D. Preslikava f ima torej $m-$koordinatnih funkcij. Pišemo

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m).$$

Seveda velja pa tudi obratno. Če je na D definirana m-terica funkcij $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funkcij, nam te funkcije določajo preslikavo $f : D \to \mathbb{R}^m$. Pišemo torej

$$(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)) = f(x), \qquad x \in D \subset \mathbb{R}^n.$$

Preslikave iz $D \subset \mathbb{R}^m$ lahko med seboj seštevamo in tvorijo strukturo vektorskega prostora nad $\mathbb{R}$.

POGLAVJE 3

Zveznost funkcij več spremenljivk

Glavni viri tega poglavja so [**1**], [**3**], [**4**], [**6**].

3.1. Definicija in ostale lastnosti

Definirajmo zveznost in limito funkcij več spremenljivk.

DEFINICIJA 3.1. Funkcija $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je **zvezna** v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsako točko $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ velja

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)| < \varepsilon.$$

DEFINICIJA 3.2. Naj bo $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $A \in \mathbb{R}$. Če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da iz $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K_\delta(a_1, a_2, \ldots, a_n) \cap D$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, sledi

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - A| < \varepsilon,$$

tedaj je A limita preslikave f v točki $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ in pišemo

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Poglejmo si izrek, ki neposredno sledi iz definicije zveznosti in limite.

IZREK 3.3. *Funkcija $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je **zvezna** v točki $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

OPOMBA 3.4. Preslikava $f : D \to \mathbb{R}^m$ je zvezna, če so zvezne vse koordinatne funkcije. Podobno kot pri funkcijah ene spremenljivke velja, da sta vsota in razlika dveh zveznih preslikav tudi zvezni preslikavi, da je kompozitum primerno definiranih zveznih preslikav tudi zvezna preslikava in da je produkt zvezne preslikave s skalarjem tudi zvezna preslikava. Zvezne preslikave nad fiksno množico torej tvorijo vektorski prostor, zvezne funkcije pa algebro nad $\mathbb{R}$.

Bolj natančno s pomočjo polarnih koordinat poglejmo zveznost za funkcije dveh spremenljivk. Lego točke v ravnini $\mathbb{R}^2$ opišemo s polarnimi koordinatami v obliki

$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi,$$

kjer je $r \geq 0$ in $\varphi \in [0, 2\pi)$. Velja

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}.$$

Tak zapis je enoličen, razen za točko $(0,0)$.

Trditev 3.5. *Funkcija dveh spremenljivk $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je **zvezna** v točki $(0,0) \in D$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $r < \delta$ velja*

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| < \varepsilon.$$

*Nadalje je f **zvezna** v točki $(a,b) \in D$, če za vsak ε obstaja tak $\delta > 0$, da za vsak $r < \delta$ velja*

$$|f(a + r\cos\varphi, b + r\sin\varphi) - f(a,b)| < \varepsilon.$$

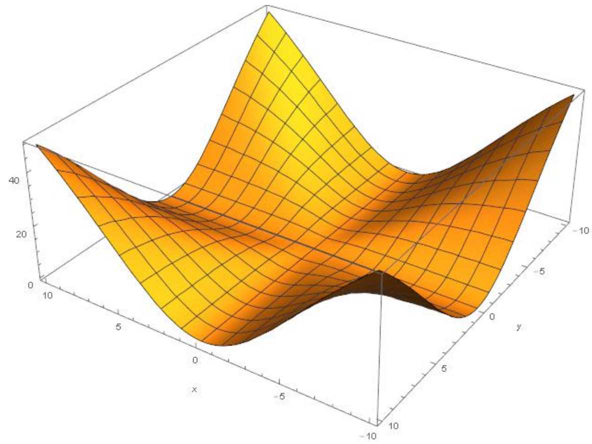
3.2. Primeri in protiprimeri

Preverimo zveznost naslednjih funkcij.

Primer 3.6. Funkcija

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

je zvezna v točki $(0,0)$.



Slika 1. Preverimo zveznost

Preverimo: Funkcijo izrazimo v polarnih koordinatah. Tako dobimo

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi}{r^2} = r^2\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

Velja torej

$$|f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| \leq r^2.$$

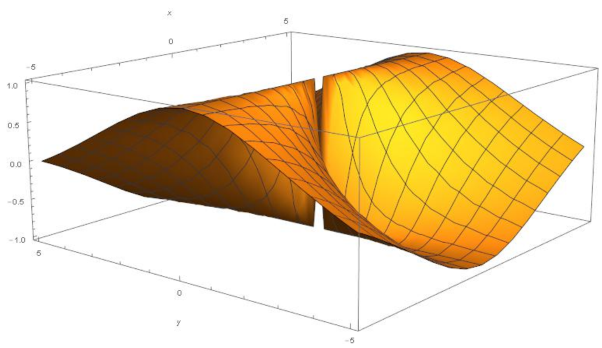
Izberemo si poljuben $\varepsilon > 0$ in naj bo $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Za $r < \delta$ nato sledi

$$|f(x,y) - f(0,0)| = |f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - f(0,0)| < r^2 < \delta^2 < \varepsilon.$$

Funkcija $f(x,y)$ je zvezna v točki $(0,0)$.

Primer 3.7. Poglejmo si zveznost funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Slika 2. Preverimo zveznost v izhodišču

Ali je funkcija zvezna v izhodišču? Če pogledamo predpisa $f(x,0)=1$ in $f(0,y)=-1$ vidimo, da se točke z x-osi preslikajo v 1, točke z y-osi pa v -1. Iz tega sledi, da so v poljubno majhni okolici točke $(0,0)$ točke, v kateri ima funkcija f vrednost 1 in točke, v katerih ima funkcija f vrednost -1. Sklepamo, da f v točki $(0,0)$ ne more biti zvezna.

Bolj natančno z uvedbo polarnih koordinat dobimo

$$f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\begin{cases}\cos 2\varphi & ; r\neq 0\\ 0 & ; r=0.\end{cases},$$

in velja

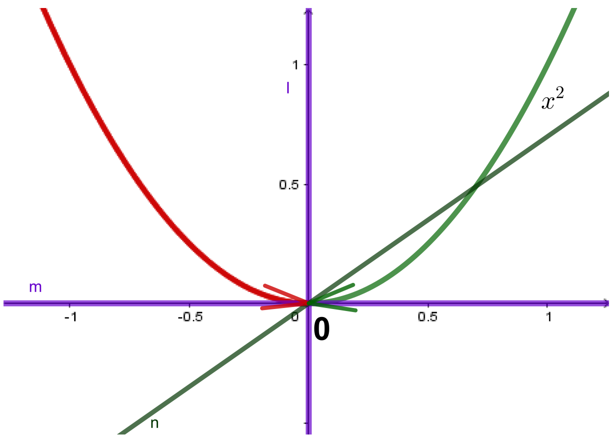
$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)=\cos 2\varphi.$$

Limita po premicah skozi izhodišče je torej enaka vrednosti funkcije v izhodišču le vzdolž koordinatnih osi.

V naslednjem primeru bomo videli, da so lahko limite po vseh premicah skozi izhodišče enake vrednosti funkcije, pa le ta vseeno ni zvezna.

Primer 3.8. Poglejmo si zveznost funkcije $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=\begin{cases}0 & ; y\neq x^2 \text{ in } (x,y)=(0,0)\\ 1 & ; y=x^2 \text{ in } (x,y)\neq(0,0).\end{cases}$$



Slika 3. Preverimo zveznost

Ali je funkcija zvezna v izhodišču? Iz slike 3 je jasno videti, da funkcija v izhodišču ni zvezna. Če vzamemo katero koli okolico točke $(0,0)$ hitro vidimo, da funkcija v tej okolici zavzame vrednosti 0 in 1. Funkcija torej ni zvezna.

Ali bi lahko s pomočjo zožitev na premice rekli isto? Narišimo šop premic in ugotovimo ali je funkcija zvezna ali ne. Poglejmo si sliko 3, kjer smo narisali tri premice skozi izhodišče $(0,0)$.

Naj bo $y = kx$ premica skozi izhodišče. Zožitev f na to premico je $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_k(x) = f(x, kx) = \begin{cases} 0 & ; kx \neq x^2 \text{ in } x = 0 \\ 1 & ; kx = x^2 \text{ in } x \neq 0 \end{cases}$$

Ker pri $x \neq 0$ sledi $kx = x^2 \Leftrightarrow x = k$, je

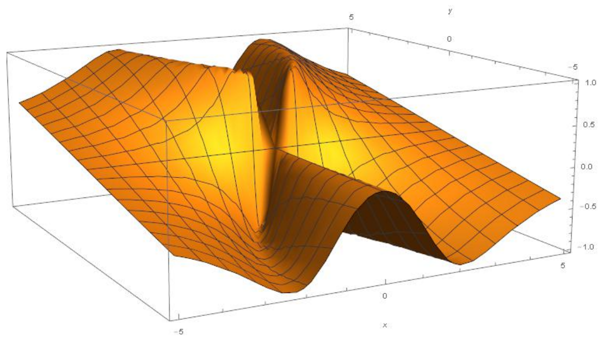
$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & ; x = k \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Funkcija $f_k(x)$ sicer ni zvezna v $x = k$, je pa zvezna v izhodišču. Edina premica, ki je nismo obravnavali je $x = 0$, vzdolž katere pa je f enaka 0. Tako vidimo, da je zožitev f na poljubno premico skozi izhodišče zvezna v izhodišču, kljub temu, da f tam ni zvezna.

Seveda lahko hitro ugotovimo, da v zgornjem primeru premice skozi izhodišče vseeno zaznajo nezveznost funkcije v izhodišču. Če je $k \neq 0$ ima zožitev $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nezveznost v točki $x = k$, ki gre proti 0, ko gre $k \to 0$. Zato je prvotna funkcija nezvezna v izhodišču.

Primer 3.9. Poglejmo si funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 y}{x^4 + y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$



Slika 4. Preverimo zveznost

Funkcija f ni zvezna v izhodišču, saj je, podobno kot v prejšnjem primeru, enaka 1 vzdolž punktirane parabole $\{y = x^2\} \backslash \{(0,0)\}$, med tem ko je enaka 0 v izhodišču. Vseeno pa je zožitev funkcije zvezna vzdolž vsake premice skozi izhodišče. Vzdolž vertikalne in horizontalne premice je funkcija kar identično enaka 0, vzdolž premice $y = kx$, $k \neq 0$ pa je njena zožitev enaka

$$f_k(x) = \frac{2kx}{x^2 + k^2}.$$

Vse te funkcije so torej zvezne v izhodišču.

Poglejmo si še nekaj zanimivih primerov nezveznosti pri funkcijah dveh spremenljivk.

Primer 3.10. Preverimo zveznost naslednje funkcije $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & ; (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & ; \text{sicer.} \end{cases}$$

Kot vidimo, ima funkcija vrednost 1 tedaj, ko ste obe koordinati x in y iz množice racionalnih števil. Izberemo si poljubno okolico ene izmed točk (x, y). V poljubni okolici točke (x, y) lahko vedno najdemo točke, v katerih sta obe koordinati racionalni kot tudi točke, v katerih to ni res. Zato so v vsaki okolici točke (x, y) tako točke, v katerih je vrednost 1 kot tudi točke, v katerih je vrednost 0. Tako vidimo, da funkcija ne more biti zvezna.

Primer 3.11. Podobno si poglejmo naslednji primer. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana kot

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} & ;(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & ;\text{sicer.} \end{cases}$$

Poglejmo najprej, da je funkcija nezvezna v vsaki točki $(a,b) \neq (0,0)$. Predpostavimo najprej, da sta a in b racionalni števili, torej $f(a,b) = \sqrt{a^2+b^2}$, in naj bo $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. Naj bo $\delta > 0$ poljuben. V δ-okolici točke (a,b) obstaja točka (a',b'), ki ima iracionalne koordinate, torej $f(a',b') = 0$. Zato je

$$|f(a',b') - f(a,b)| = \sqrt{a^2+b^2} > \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \varepsilon.$$

Torej je f nezvezna v (a,b).
Naj bo sedaj $(a,b) \neq (0,0)$ taka, da je vsaj eno od števil a,b iracionalno. Torej je $f(a,b) = 0$. Naj bo zopet $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ in δ poljuben. V δ-okolici točke (a,b) obstaja točka (a',b'), ki ima obe koordinati racionalni, in hkrati velja $|(a,b)-(a',b')| < \epsilon$. Torej $f(a',b') = \sqrt{a'^2+b'^2} > \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$ in velja

$$|f(a',b') - f(a,b)| = \sqrt{a'^2+b'^2} > \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} = \varepsilon.$$

Pokažimo sedaj, da je f zvezna v $(0,0)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\delta = \varepsilon$. Naj bo (x,y) poljubna točka iz δ-okolice točke $(0,0)$. Potem velja

$$|f(x,y) - f(0,0)| = f(x,y) < \varepsilon.$$

Torej imamo primer funkcije, ki je zvezna le v točki $(0,0)$.

POGLAVJE 4

Parcialni odvodi funkcij več spremenljivk

Glavni viri tega poglavja so [**1**], [**3**], [**4**].

4.1. Definicija

Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$ funkcija več spremenljivk in (a, b) notranja točka množice D. *Parcialna odvoda* po x in y funkcije f v točki (a, b) definiramo (podobno kot pri odvodih funkcije ene spremenljivke) kot limiti ustreznih parcialnih diferenčnih kvocientov (pri pogoju, da ti dve limiti obstajata):

$$f_x(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h}$$
$$f_y(a,b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{k\to 0} \frac{f(a,b+k) - f(a,b)}{k}$$

Parcialnega odvajanja se lotimo tako, da odvajamo funkcijo na x oziroma na y po že znanih pravilih za odvajanje funkcij ene spremenljivke, pri čemer drugo spremenljivko gledamo kot konstanto.

Primer 4.1. Izračunajmo parcialne odvode za naslednjih dveh funkcij dveh spremenljivk. Za funkcijo $f(x, y) = x^3y^2 + x$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 1$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y$. Za funkcijo $h(x, y) = x \cos \frac{x}{y}$ pa imamo $\frac{\partial h}{\partial x} = \cos \frac{x}{y} - \frac{x}{y} \sin \frac{x}{y}$ in $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x^2}{y^2} \sin \frac{x}{y}$.

Podobno ravnamo tudi splošno pri funkcijah več spremenljivk.

Definicija 4.2. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, in $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + k, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a)}{k},$$

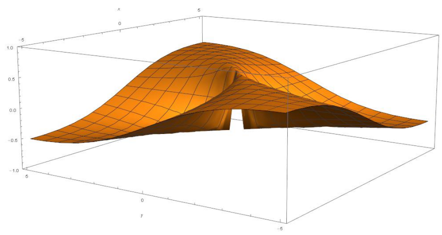
jo imenujemo **parcialni odvod** funkcije f po spremenljivki x_i funkcije $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ v točki a in označimo $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ali $f_{x_i}(a)$.

Definicija 4.3. Pravimo, da je funkcija $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ parcialno odvedljiva na odprti množici $D \subset \mathbb{R}^n$, če je parcialno odvedljiva po vseh spremenljivkah v vsaki točki območja D. Še več, f je zvezno parcialno odvedljiva, če so parcialni odvodi zvezne funkcije.

Iz teorije funkcij ene spremenljivke vemo, da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}$, zvezna v a, če je v a odvedljiva. Pri funkcijah več spremenljivk pa iz samega obstoja parcialnih odvodov funkcije f ne moremo sklepati, da je funkcija f zvezna. Zadosten pogoj pa bi bila *zveznost* parcialnih odvodov, kot bomo videli v naslednjem poglavju. Poglejmo si to na primeru.

Primer 4.4. Poglejmo si primer

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Slika 1. Preverimo zveznost z uporabo polarnih koordinat

Preverimo lahko, da funkcija ni zvezna v točki $(0,0)$, saj v njej nima limite. To lahko vidimo tako, da vpeljemo polarne koordinate $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$. Potem je $f(x,y) = \begin{cases} \cos\varphi\sin\varphi & ; r \neq 0 \\ 0 & ; r = 0. \end{cases}$

Ima pa funkcija kljub temu v tej točki oba parcialna odvoda: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$ in $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = 0$. Seveda je funkcija parcialno odvedljiva tudi v vseh drugih točkah ravnine.

V zgornjem primeru sicer jasno vidimo, da je bil problem v tem, da parcialni odvodi v neki točki upoštevajo le obnašanje funkcije v horizontalni in v vertikalni smeri, ne upoštevajo pa, kako se funkcija obnaša v vseh ostalih smereh. Seveda lahko definicijo parcialnih odvodov razširimo tako, da definiramo odvode v poljubni smeri.

Definicija 4.5. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D$ notranja točka in $\vec{n}$ poljuben enotski vektor v $\mathbb{R}^n$. Če obstaja limita diferenčnega kvocienta

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(a + k\vec{n}) - f(a)}{k},$$

jo imenujemo **smerni odvod** funkcije f v smeri $\vec{n}$ in označimo $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(a)$.

Poglejmo, da tudi obstoj vseh smernih odvodov v točki ne zagotavlja zveznosti v tej točki.

Primer 4.6. Poglejmo si funkcijo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^4+y^2} & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Če točka (x, y) ni izhodišče, je funkcija tam seveda smerno odvedljiva v vseh smereh. Poglejmo si torej še obstoj smernih odvodov v točki $(0, 0)$. Naj bo $\vec{n} = (n_1, n_2)$ poljuben smerni vektor v $\mathbb{R}^2$. Predpostavimo najprej, da $n_2 \neq 0$. Potem velja

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) &= \lim_{k \to 0} \frac{f(kn_1, kn_2) - f(0, 0)}{k} = \\ &= \lim_{k \to 0} \frac{2k^3n_1^2n_2/(k^4n_1^4 + k^2n_2^2)}{k} = 2n_1^2/n_2. \end{aligned}$$

Če je $n_2 = 0$ pa imamo očitno

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(0, 0) = 0.$$

Smerni odvodi torej obstajajo v vseh smereh in v vseh točkah, funkcija pa vseeno ni zvezna v 0, saj je enaka 1 vzdolž punktirane parabole $\{y = x^2\} \backslash \{(0, 0)\}$.

4.2. Schwarzov izrek

Če je funkcija parcialno odvedljiva po neki spremenljivki na svojem definicijskem območju, lahko parcialni odvod zopet razumemo kot funkcijo več spremenljivk, ki jo morda lahko zopet parcialno odvajamo. Tako pridemo do tako imenovanih višjih parcialnih odvodov. Parcialni odvodi drugega reda za funkcijo dveh spremenljivk so tako definirani z naslednjim predpisom:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Primer 4.7. Za funkcijo $f(x,y) = x^3y^2 + x$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2 + 1$ in $\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^3y$. Poglejmo si parcialne odvode drugega reda. Velja

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6x^2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3.$$

Na tem primeru smo videli, da so mešani odvodi enaki ne glede na vrstni red odvajanja. Seveda to ni slučajno, saj velja naslednji izrek.

Izrek 4.8. ***(Schwarzov izrek)*** *Naj bo $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ in $a \in D$ notranja točka. V okolici a naj obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ in $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in naj bosta zvezna. Prav tako naj v okolici a obstajata parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ in naj bosta zvezna v a. Potem velja*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

Dokaz. Zaradi nekoliko bolj preproste notacije predpostavimo, da imamo opravka s funkcijo dveh spremenljivk, torej $x_i = x$ in $x_j = y$. Nadalje lahko predpostavimo, da je $a = (0,0)$. Definirajmo

$$F(h,k) = f(h,k) - f(h,0) - f(0,k) + f(0,0).$$

Naj bo

$$g_1(x) = f(x,k) - f(x,0).$$

Potem dobimo

$$F(h,k) = g_1(h) - g_1(0)$$

in po Lagrangeovem izreku za funkcijo g_1 na intervalu $[0, h]$ in funkcijo $\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y)$ na intervalu $[0, k]$

$$F(h, k) = g_1'(\xi)h = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, k) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, 0)\right) h = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \nu)hk$$

kjer sta $\xi \in (0, h), \nu \in (0, k)$. Če po drugi strani izberemo $h > 0$ in definiramo

$$g_2(y) = f(h, y) - f(0, y),$$

dobimo

$$F(h, k) = g_2(k) - g_2(0)$$

in podobno po Lagrangeovem izreku

$$F(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \nu')hk$$

kjer sta $\xi' \in (0, h), \nu' \in (0, k)$. Velja torej

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \nu) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \nu').$$

Ker sta parcialna odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ zvezna v $(0, 0)$ dobimo v limiti, ko gresta tako h kot k proti 0 in s tem ξ, ξ', ν, ν' proti 0,

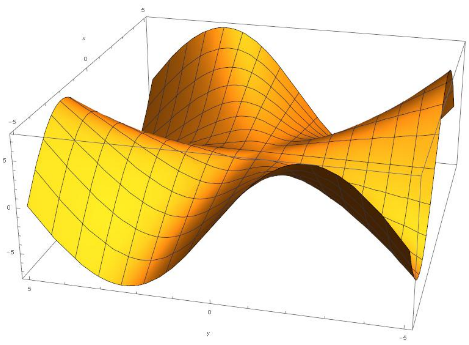
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

S tem je dokaz končan. $\square$

Brez predpostavke zveznosti mešanih odvodov, mešani odvodi med seboj niso nujno enaki. Poglejmo si primer funkcije, ko parcialna odvoda ne komutirata. Takšna funkcija torej ne zadošča predpostavkam Schwarzovega izreka.

Primer 4.9. Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definirana z

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0). \end{cases}$$



Slika 2. Protiprimer Schwarzovega izreka

Izračunajmo parcialna odvoda po x in y v primeru, ko $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4y + 4x^2y^3 - y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

Izračunati moramo še parcialna odvoda v točki $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0.$$

Tako sta torej oba parcialna odvoda

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y+3x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ter

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2} & ;(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ;(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

zvezna v točki $(0,0)$, kar lahko hitro vidimo vpeljavo polarnih koordinat. Zvezna sta seveda tudi v okolici točke $(0,0)$. Brez težav lahko poiščemo tudi mešana parcialna odvoda drugega reda te funkcije, kadar velja $(x, y) \neq (0, 0)$. Točki $(0, 0)$ pa moramo odvoda izračunati podobno kot prej

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x - 0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{-y - 0}{y} = -1.$$

Dobimo torej $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Iz zgornjega izreka seveda sledi, da odvoda $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nista zvezna v točki $(0, 0)$.

Seveda pa lahko dobimo tudi primer funkcije, ki ne zadošča predpostavkam Schwarzovega izreka, za katero pa obstajajo vsi parcialni odvodi drugega reda v dani točki in sta mešana odvoda enaka.

Primer 4.10. Naj bo

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & ; (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0 & ; \text{sicer}, \end{cases}$$

kot v primeru 3.10, in naj bo

$$g(x,y) = x^2 y^2 f(x,y).$$

Lahko izračunamo

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 h^2 f(x,h) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} x^2 h f(x,h) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 y^2 f(h,y) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} y^2 h f(h,y) = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,0) = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,y) = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0.$$

Prvi dve limiti obstajata, ker je f omejena. Ker so vsi parcialni odvodi vzdolž koordinatnih osi enaki 0, so parcialni odvodi drugega reda v točki $(0, 0)$ vsi enaki 0. Funkcija g je zvezna le vzdolž obeh koordinatnih osi, po obeh spremnljivkah je parcialno odvedljiva vzdolž obeh osi in v vseh točkah z obema iracionalnima koordinatama, mešani parcialni odvodi drugega reda pa obstajajo le v točki $(0, 0)$.

POGLAVJE 5

Diferencial funkcije več spremenljivk

Glavni viri tega poglavja so [**1**], [**5**], [**7**].

5.1. Definicija

DEFINICIJA 5.1. Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ in $a = (a_1, \dots, a_n) \in D$ notranja točka. Funkcija f je v točki a *diferenciabilna*, če obstajajo parcialni odvodi $f_{x_1}(a), \dots, f_{x_n}(a)$ in velja

$$f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) = f(a)+f_{x_1}(a)h_1+\dots+f_{x_n}(a)h_n+ o(h_1, \dots, h_n),$$

kjer za napako o velja

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} \frac{o(h_1, \dots, h_n)}{\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}} = 0.$$

Izraz $df(h) = f_{x_1}(a)h_1 + \dots + f_{x_n}(a)h_n$ imenujemo *totalni diferencial.* Funkcija je tako diferenciabilna na območju D, ko je diferenciabilna v vsaki točki iz D.

Velja naslednja trditev.

TRDITEV 5.2. *Naj bo $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ diferenciabilna v notranji točki $a \in D$. Potem je funkcija f zvezna v točki a.*

DOKAZ. Iz pogoja diferenciabilnosti funkcije f v točki a vidimo, da velja

$$\lim_{(h_1,\dots,h_n)\to(0,\dots,0)} f(a_1 + h_1, \dots, a_n + h_n) = f(a).$$

To pa pomeni zveznost v točki a. □

IZREK 5.3. *Zvezna funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ je diferenciabilna v notranji točki $a \in D$, če so vsi parcialni odvodi $f_{x_1}(x), \dots, f_{x_n}(x)$ zvezni v a.*

DOKAZ. Dokaz si poglejmo le v primeru funkcije dveh spremenljivk. Naj bo $a = (a, b)$ in $h = (h, k)$. Naj bo

$$\Delta f = f(a+h, b+k) - f(a, b) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) + f(a+h, b) - f(a, b).$$

Po Lagrangeovem izreku obstaja ξ med a in $a + h$ tak, da je

$$f(a + h, b) - f(a, b) = f_x(a + \vartheta_1 h, b)h,$$

kjer je $0 < \vartheta_1 < 1$ neko število. Podobno dobimo

$$f(a + h, b + k) - f(a + h, b) = f_y(a + h, b + \vartheta_2 k)k,$$

kjer je $0 < \vartheta_2 < 1$.

Ker sta oba parcialna odvoda zvezni funkciji je

$$f_x(a + \vartheta_1 h, b) = f_x(a, b) + o_1(h)$$

$$f_y(a + h, b + \vartheta_2 k) = f_y(a, b) + o_2(h, k),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o_1(h) = 0$ in $\lim_{(h,k)\to(0,0)} o_2(h, k) = 0$. Tako je

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a + h, b + k) - f(a, b) - (f_x(a, b)h + f_y(a, b)k)}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o_1(h)h + o_2(h, k)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

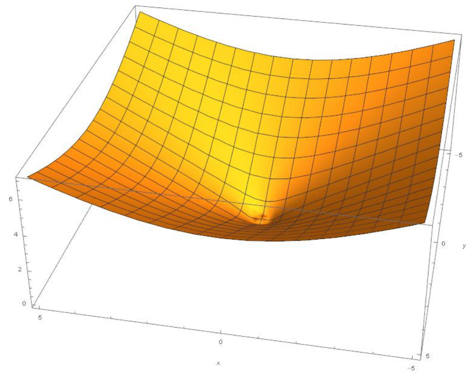
□

OPOMBA 5.4. Lahko bi pokazali, da je funkcija diferenciabilna tudi pod nekoliko milejšimi pogoji. Dovolj je namreč, da predpostavimo, da je $n - 1$ parcialnih odvodov zveznih v točki a. Pri funkcijah dveh spremenljivk to pomeni, da je zveznost vsaj enega parcialnega odvoda že zadostna za difirenciabilnost ([**2**]).

5.2. Primeri in protiprimeri

PRIMER 5.5. Poglejmo si primer funkcije, ki ima nezvezne parcialne odvode v točki $(0, 0)$, a je tam vseeno diferenciabilna.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}) & ; (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ; (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$



SLIKA 1. Primer diferenciabilne funkcije

Izračunajmo parcialne odvode funkcije f v izhodišču. Uporabili bomo definicijo parcialnih odvodov. Parcialni odvod funkcije f po x je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin(\frac{1}{|h|})-0}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} h\sin(\frac{1}{|h|}) = 0.\end{aligned}$$

Podobno dobimo tudi $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Poglejmo, da je f diferenciabilna v $(0,0)$. Ker je $f(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, moramo torej preveriti, da velja

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}},$$

kjer je

$$o(h,k) = f(h,k).$$

Torej

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 = \lim_{(h,k)\to(0,0)}&\frac{(h^2+k^2)\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}}{\sqrt{h^2+k^2}} =\\ = \lim_{(h,k)\to(0,0)}&\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0,\end{aligned}$$

saj je $\sin\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}$ omejen med -1 in 1, $\sqrt{h^2+k^2}$ pa gre proti 0.

Izračunajmo $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ še v ostalih točkah.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{x\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - \frac{y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

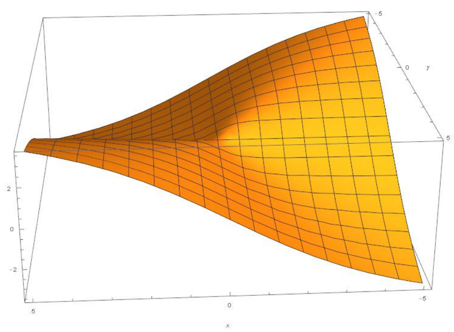
Uporabimo polarne koordinate $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, da preverimo nezveznost parcialnih odvodov v izhodišču:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) &= 2r\cos\varphi\sin\frac{1}{r} - \frac{r\cos\varphi\cos\frac{1}{r}}{r}\\ &= 2r\cos\varphi\sin\frac{1}{r} - \cos\varphi\cos\frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Ker je limita $\lim_{r\to 0} 2r\cos\varphi\sin\frac{1}{r} = 0$, drugi del, $\cos\varphi\cos\frac{1}{r}$, pa nima limite v izhodišču, parcialni odvod ni zvezen v izhodišču. Podobno velja za $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Primer 5.6. Poglejmo si primer nediferenciabilne funkcije, ki sicer je parcialno odvedljiva, vendar parcialna odvoda nista zvezna v (0, 0). Definirajmo funkcijo $f(x,y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Slika 2. Primer nediferenciabilne funkcije

Seveda f_x in f_y obstajata v vsaki točki, ki se razlikuje od točke $(0,0)$. Poglejmo si ali obstajata tudi v točki $(0,0)$. Potrebovali bomo definicijo parcialnih odvodov.

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Podobno lahko izračunamo tudi za $f_y(0,0)$. Preverimo še diferenciabilnost funkcije f v točki $(0,0)$. Za diferenciabilnost bi moralo veljati

$$f(h,k) = f(0,0) + f_x(0,0)h + f_y(0,0)k + o(h,k),$$

kjer je $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$. V našem primeru pa je

$$o(h,k) = \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

in zato

$$\frac{o(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2}.$$

Če je $h = k$, je $o(h,h) = \frac{1}{2} \neq 0$, torej funkcija ni diferenciabilna v $(0,0)$. Čeprav odvodi funkcije obstajajo v vsaki točki, ne morejo biti zvezni, saj nam to pove izrek, ki pravi, da morajo biti funkcije z zveznimi parcialnimi odvodi v odprtem intervalu diferenciabilne v tem intervalu. Preverimo:

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

in

$$f_y(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Oba odvoda sta nezvezna v $(0,0)$. Pri parcialnem odvodu po x to lahko hitro ugotovimo, če pogledamo točke $(0,y)$, pri parcialne odvodu po y pa, če pogledamo točke $(x,0)$.

Literatura

[1] Globevnik, J., Brojan, M. (2010). *Analiza II*. Skripta. Pridobljeno 1.12.2017 s `https://www.fmf.uni-lj.si/~globevnik/skriptaII.pdf`

[2] Henle, J.M. (1984), Tangent Planes with Infinitesimals, *The American Mathematical Monthly*, 91, 433-435.

[3] Jamnik, R. (2008). *Matematika*. Ljubljana: DMFA.

[4] Magajna, B. (2011). *Linearna algebra, metrični prostor in funkcije več spremenljivk*. Ljubljana: DMFA.

[5] Nykamp, DQ., Rogness, J. *A differentiable function with discontinuous partial derivates*. Pridobljeno 21.2.2018 s `https://mathinsight.org/differentiable_function_discontinuous_partial_derivatives`

[6] Slapar, M. (2017). *Funkcije več spremenljivk*. Skripta. Pridobljeno 22.11.2017 s `https://ucilnica.pef.uni-lj.si/pluginfile.php/368/course/section/346/Skripta.pdf`

[7] Vogel, T.(1997). *A non-differentiable function with partial derivatives everywhere*. Pridobljeno 3.3.2018 s `http://www.math.tamu.edu/~tvogel/gallery/node14.html`