UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA

# DIPLOMSKO DELO

SILVA BOHINC

UNIVERZA V LJUBLJANI
PEDAGOŠKA FAKULTETA
Študijski program: Matematika in fizika

# NESKONČNE VRSTE IN NESKONČNI PRODUKTI

DIPLOMSKO DELO

Mentor:
dr. Marko Slapar, izr. prof.

Kandidatka:
Silva Bohinc

Ljubljana, 2014

**Program diplomskega dela**

V diplomskem delu obravnavajte kriterije za konvergenco neskončnih vrst in neskončnih produktov. Kot primer neskončnega produkta obravnavajte Wallisovo formulo za število $\pi$.

Ljubljana, 2014 Mentor: dr. Marko Slapar, izr. prof.

**Zahvala**

Zahvaljujem se mentorju izr. prof. dr. Marku Slaparju za nasvete in strokovno pomoč pri pisanju diplomskega dela. Zahvaljujem se tudi svoji družini in vsem drugim, ki ste me kakor koli podpirali in spodbujali v času študija.

**Povzetek**

Osrednji del diplomskega dela je predstavitev neskončnega produkta in Wallisove formule, ki je v delu predstavljen kot zanimiv primer neskončnega produkta. Za preučevanje neskončnega produkta pa potrebujemo najprej nekaj predznanja. Uvodu bo sledilo poglavje o neskončnih vrstah; definicija neskončnih vrst, nekaj osnovne teorije o konvergenci vrst in kriterijih za ugotavljanje konvergence. Vrstam sledi poglavje o neskončnem produktu, v katerem bo predstavljen neskončni produkt in konvergenca neskončnega produkta. Za konec sledi še poglavje o Wallisovem produktu.

**Ključne besede:** neskončne vrste, neskončni produkti, Wallisova formula

**Abstract**

The main topic of my diploma thesis is the study of infinite product and the Wallis formula, which is one of the more interesting examples of infinite products. To study infinite products, we need some preliminaries. We follow the Introduction chapter with a chapter on infinite series. We give a definition of an infinite series, and present some basic results on convergence as well as a comprehensive list of convergence criteria. The next chapter is devoted to infinite products and their convergence. We conclude the thesis with a chapter on the Wallis product.

**Keywords:** infinite series, infinite product, Wallis formula

# Kazalo

POGLAVJE 1

# Uvod

Neskončne vrste imajo v zgodovini matematike poseben pomen. Že Aristotel je omenjal, da je vsota neskončno mnogo členov lahko končno število. Prav tako tudi Arhimed v svojem delu implicitno obravnava geometrijsko vrsto. Vendar je nesmiselno predvidevati, da je šlo že v njunem času za eksplicitno obravnavo neskončne vrste. Resnejši začetki segajo v 17. stoletje. Prav tako so o neskončnosti razpravljali misleci skozi vso zgodovino, vendar je šele Georgu Cantorju in Richardu Dedekindu v 19. stoletju uspelo matematično korektno obravnavati pojem neskončnosti.

Moj cilj je predstaviti neskončne vrste in neskončni produkt kot celoto, saj se produkt zelo navezuje na vrste, zato bom najprej obravnavala neskončne vrste. S tem želim bralcu prikazati jasnejšo sliko o neskončnih vrstah in posledično tudi o neskončnem produktu.

Uvodu bo sledilo poglavje o neskončnih vrstah. Predstavila bom vrste, konvergenco vrst in kriterije za ugotavljanje konvergentnosti. Ko govorimo o neskončnih vrstah nas poleg ostalih lastnosti vrste zanima predvsem konvergenca. Ali ima vrsta limito? Ali vrsta konvergira? Zato bo kar precejšen poudarek na konvergenčnih kriterijih.

Poglavju o neskončnih vrstah sledi poglavje o neskončnih produktih. Tudi pri neskončnih produktih nas najbolj zanima njihova konvergenca. Poleg tega je pomembna povezava med neskončno vrsto in neskončnim produktom. Kot zelo zanimiv primer produkta bom predstavila Wallisov produkt.

Zaradi številnih zanimivih lastnosti bom Wallisov produkt predstavila v posebnem poglavju. V tem poglavju bom nekaj povedala o avtorju slavne formule, Johnu Wallisu, in predstavila tri zanimive načine dokazovanja tega produkta. Prvi je standardni način dokazovanja z ocenjevanjem določenih integralov trigonometričnih funkcij, v drugem dokazu bom pokazala, da se na videz zahteven produkt da dokazati z uporabo osnovne algebre, v tretjem dokazu pa bo dokaz sledil iz produktne formule za funkcijo sinus.

POGLAVJE 2

# Neskončne vrste

Pri pisanju in oblikovanju tega poglavja sem si v večini pomagala z [**1**] in [**5**]. Neskončna realna vrsta je formalna vsota

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \cdots ,$$

kjer je $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ zaporedje realnih števil. Zaporedje realnih števil

$$\begin{aligned}
&s_1 = a_1\\
&s_2 = a_1 + a_2\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3\\
&\ldots\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n\\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

imenujemo *zaporedje delnih vsot* vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definicija 2.1. Če zaporedje delnih vsot $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, konvergira (k limiti s), pravimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira* (to pomeni, da jo lahko seštejemo) in ima vsoto $s$. Pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = s.$$

Če vrsta ne konvergira, pravimo, da je divergentna ali da *divergira*.

Primer 2.2. Seštejmo vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Najprej razbijemo ulomek $\frac{1}{k(k+1)}$ na vsoto parcialnih ulomkov:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Za $n$-to delno vsoto torej velja

$$
\begin{aligned}
s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
&= 1 - \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}
$$

Iz tega sledi

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Vrsta torej konvergira in vsota vrste je enaka 1.

Primer 2.3. Vrsto

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots ,$$

imenujemo *geometrijska vrsta*, saj členi te vrste tvorijo geometrijsko zaporedje. Začetni člen te vrste je $a, a \neq 0$, koeficient pa $q, q \neq 1$. Zapišimo $n$-to delno vsoto:

$$
\begin{aligned}
s_n &= a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^{n-1} \\
&= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\
&= a\frac{1-q^n}{1-q}.
\end{aligned}
$$

- Če je $|q| < 1$, je $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$, torej
$$a + aq + aq^2 + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$
- Če je $|q| > 1$, tedaj $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, torej vrsta $a + aq + aq^2 + \cdots$ divergira.
- Če je $q = 1$ oz. $q = -1$, vrsta $a + aq + aq^2 + \cdots$ divergira.

Izrek 2.4 (Cauchyjev kriterij). *Vrsta*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + \cdots$$

*je konvergentna natanko tedaj, ko za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja tako naravno število* $n(\varepsilon)$*, da je za vsak* $m > n(\varepsilon)$ *in za vsako naravno število* $p$

$$|a_{m+1} + \cdots + a_{m+p}| < \varepsilon.$$

Dokaz. Zaporedje delnih vsot je konvergentno natanko tedaj, ko je Cauchyjevo, tj. ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $n(\varepsilon)$, da za $m > n(\varepsilon)$ in $p \in \mathbb{N}$ velja

$$|s_{m+p} - s_m| < \varepsilon.$$

Iz enakosti

$$s_{m+p} - s_m = a_{m+1} + \cdots + a_{m+p},$$

dobimo trditev izreka. □

Posledica 2.5. *Če je vrsta* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergentna, velja*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0.$$

Dokaz. Dokaz sledi neposredno iz prejšnjega izreka. Za vsak $\varepsilon > 0$ je od nekega $n(\varepsilon)$ naprej za vsak $m$ (za $p$ vzamemo kar 1)

$$|a_{m+1}| < \varepsilon,$$

torej zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ res konvergira k 0. $\square$

Vrsta, katere členi ne konvergirajo k 0, torej divergirajo. Seveda pa ne velja nujno, da so vrste, katerih členi konvergirajo k 0, konvergentne. Konvergenco takih vrst ugotavljamo z uporabo ustreznih kriterijev za ugotavljanje konvergentnosti. Še prej si poglejmo pojma *absolutna* in *pogojna konvergenca.*

Definicija 2.6. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je *absolutno konvergentna,* če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira in $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergira, rečemo, da vrsta *pogojno konvergira.*

Če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergira, potem nam Cauchyjev kriterij pove, da konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Absolutno konvergentne vrste so torej konvergentne.

Opomba 2.7. Pomembna razlika med pogojno in absolutno konvergentnimi vrstami je, da je vsota absolutno konvergentne vrste neodvisna od vrstnega reda seštevanja vrste, medtem ko pri pogojno konvergentni vrsti lahko s primerno premutacijo členov vrste kot vsoto vrste dobimo katero koli število iz razširjenega intervala $[-\infty, \infty]$ (Riemannov izrek).

## 2.1. Kriteriji za ugotavljanje konvergentnosti

S kriteriji za ugotavljanje konvergentnosti ugotavljamo, ali dana vrsta konvergira oziroma divergira. Večina kriterijev konvergence temelji na primerjalnem kriteriju, torej na primerjavi dane vrste z vnaprej znano vrsto. Nobeden od kriterijev, ki temeljijo na primerjalnem kriteriju, ne more dokazati konvergence oziroma divergence poljubnih vrst, saj za dano konvergentno vrsto vedno obstaja prav tako konvergentna vrsta, katere členi še počasneje konvergirajo proti 0.

### 2.1.1. Primerjalni kriterij

Izrek 2.8 (Primerjalni kriterij). *Naj bosta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *in* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *vrsti, pri čemer je* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *vrsta z nenegativnimi členi. Naj za vsak* $n$ *velja* $|a_n| \le b_n$*. Če konvergira vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*, konvergira tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*. Če ima* $a_n$ *nenegativne člene in vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergira, divergira tudi* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$*.*

Dokaz. Naj bo $s_n$ $n$-ta delna vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $t_n$ $n$-ta delna vsota $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tedaj iz predpostavke sledi

$$|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+p}| \le |t_{n+p} - t_n|.$$

Po Cauchyjevem kriteriju za dovolj velik $n$ in vsak $p$ velja $|t_{n+p} - t_n| < \varepsilon$, torej je tudi $|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$. Iz tega sledi, da vrsta konvergira. Če so členi vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitivni in vrsta divergira, so tudi delne vsote $t_n$ neomejene in je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentna. $\square$

Opomba 2.9. Izrek velja tudi, če velja $a_n \leq b_n$ za vse $n$ od nekega naprej. Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s členi poljubnega predznaka in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsta z nenegativnimi členi, velja $|a_n| \leq b_n$ za vsak $n$, tedaj pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *majoranta* za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Primer 2.10. Pokažimo, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

konvergira natanko tedaj, ko je $s > 0$.

Če je $s \leq 0$, členi ne konvergirajo proti 0. Potrebni pogoj torej ni izpolnjen in vrsta divergira.

Najprej pokažimo, da harmonična vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ni konvergentna. Ker velja

$$\frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \cdots + \frac{1}{m+m} > m\frac{1}{2m} = \frac{1}{2},$$

je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{2}, \qquad \text{2 člena}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{2}, \qquad \text{4 členi}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \ldots + \frac{1}{16} > \frac{1}{2}, \qquad \text{8 členov}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} > \frac{1}{2}, \qquad 2^{k-1} \text{ členov.}$$

Iz tega sledi, da delne vsote harmonične vrste niso navzgor omejene. Vrsta torej divergira.

Naj bo sedaj $0 < s < 1$. V tem primeru vrsto $\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^s}$ primerjamo s harmonično vrsto

$$\frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{n}.$$

Primerjalni kriterij nam torej pove, da vrsta divergira.

Naj bo sedaj $s > 1$. Recimo, da je $s - 1 = r$, torej je $s = 1 + r$, $r > 0$. Primera se lotimo podobno kot pri harmonični vrsti:

$$\frac{1}{(n+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^s} < n\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^r},$$

torej velja

$$\begin{aligned} \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} &< \frac{1}{2^r}, && \text{2 člena} \\ \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{8^s} &< \frac{1}{4^r} = \frac{1}{(2^r)^2}, && \text{4 členi} \\ \frac{1}{9^s} + \frac{1}{10^s} + \ldots + \frac{1}{16^s} &< \frac{1}{8^r} = \frac{1}{(2^r)^3}, && \text{8 členov} \\ &\cdots \end{aligned}$$

Poljubna delna vsota $s_n$ je torej manjša od števila

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^r} + \left(\frac{1}{2^r}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^r}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^r}\right)^k + \cdots < \infty.$$

Vrsta je torej pri $s > 1$ konvergentna.

### 2.1.2. D'Alambertov kvocientni kriterij in Cauchyjev korenski kriterij

Tako kvocientni kot korenski kriterij dobimo tako, da vrsto poskušamo primerjati z geometrijsko vrsto. Zato se izkaže, da sta kvocientni in korenski kriterij enako dobra za dokazovanje konvergence. Natančneje to pomeni, da konvergenco pri dani vrsti lahko ugotovimo s kvocientnim kriterijem natanko tedaj, ko jo lahko ugotovimo tudi s korenskim.

Izrek 2.11 (D'Alambertov ali kvocientni kriterij). *Naj bo vrsta*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

*vrsta s strogo pozitivnimi členi. Naj obstaja limita*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = a.$$

*Če je*

- $a < 1$, *vrsta konvergira,*
- $a > 1$, *vrsta divergira.*

Dokaz. Za vsak $\varepsilon > 0$ imamo pri dovolj velikih $n$

$$a - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < a + \varepsilon.$$

Če je $a < 1$, vzemimo $\varepsilon < 1 - a$, tako da je $a + \varepsilon < 1$, in označimo $a + \varepsilon = q$. Od nekega $n_0$ naprej je potem za vsak $n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1,$$

oziroma

$$a_{n_0+1} < a_{n_0} q.$$

Po indukciji dobimo

$$a_{n_0+k} < a_{n_0} q^k.$$

Ker je

$$a_{n_0} + a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 + a_{n_0} q^3 + \ldots$$

geometrijska vrsta s pozitivnimi členi in s kvocientom $q < 1$, je konvergentna in je zato po primerjalnem kriteriju tudi vrsta

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \cdots$$

konvergentna, s tem pa tudi vrsta

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n_{0-1}} a_k + \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k.$$

Naj bo sedaj $a > 1$. Izberimo $\varepsilon < a - 1$, tako da je $a - \varepsilon > 1$. Za vse dovolj velike $n$ je potem

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > a - \varepsilon > 1,$$

se pravi $a_{n+1} > a_n$. Od nekega $n_0$ naprej je torej

$$a_{n_0} < a_{n_0+1} < a_{n_0+2} < \cdots .$$

Členi naše vrste ne konvergirajo proti 0 in je zato vrsta divergentna. □

Primer 2.12. Za katera realna števila $x$ je konvergentna vrsta

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ?$$

Za vsako naravno število $n$ je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^n}{x!} \frac{(n-1)!}{x^{n-1}} = \frac{x}{n}.$$

Ker velja za vsako realno število $x$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|x|}{n} = 0,$$

je naša vrsta po d'Alambertovem kriteriju konvergentna za vsak $x$. Seveda vemo iz teorije Taylorjevih vrst, da velja

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots , \qquad \text{za vsak } x \in \mathbb{R}.$$

Primer 2.13. Poskusimo konvergenco vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ pokazati še s kvocientnim kriterijem.

Velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^s=1.$$

Torej kvocientni kriterij odpove. Razlog je v tem, da členi konvergentne geometrijske vrste konvergirajo proti 0 bistveno hitreje kot členi vrste $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$.

Izrek 2.14 (Cauchyjev korenski kriterij). *Naj bo*

$$a_1+a_2+a_3+\dots$$

*vrsta s pozitivnimi členi $a_i$. Naj obstaja limita*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

*Če je*

- $q<1$, *vrsta konvergira,*
- $q>1$, *vrsta divergira.*

Dokaz. Naj bo $c=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Recimo najprej, da je $c<1$. Vzemimo poljubni $\varepsilon>0$, za katerega je $q=c+\varepsilon<1$. Tedaj po definiciji limite za vsak dovolj velik $k$ velja

$$\sqrt[n]{a_k}\le q,$$

to pa pomeni

$$a_k\le q^k.$$

Ker je $q<1$, geometrijska vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju tudi naša vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ konvergira.

Naj bo zdaj $c>1$ in naj bo $\varepsilon>0$ tak, da je $q=c-\varepsilon>1$. Za vsak dovolj velik $k$ je

$$\sqrt[n]{a_k}\ge q,$$

kar pomeni

$$a_k\ge q^k.$$

Ker je $q>1$ členi vrste ne konvergirajo proti 0, zato je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ divergentna. $\square$

Primer 2.15. Poglejmo, za katere $x$ konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{\infty}a_nx^n$, pri čemer predpostavimo, da obstaja limita $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Velja

$$q=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n||x|^n}=|x|\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Vrsta torej konvergira, če je $q<1$ oziroma

$$|x|<\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=R.$$

Iz teorije potenčnih vrst vemo, da je $R$ ravno konvergenčni radij vrste.

### 2.1.3. Raabejev kriterij

Pri Raabejevem kriteriju primerjamo dano vrsto z vrsto $\sum \frac{1}{n^s}$. Ker členi te vrste konvergirajo proti 0 bistveno počasneje kot členi geometrijske vrste, je Raabejev kriterij močnejši kot kvocientni oz. korenski kriterij. To natančneje pomeni, da bomo s pomočjo Raabejevega kriterija lahko ugotavljali konvergenco tudi nekaterih vrst, pri kateri prejšnja dva kriterija odpovesta.

Izrek 2.16 (Raabejev kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja limita*

$$\lim_{n\to\infty} = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = R.$$

*Če je*

- $R > 1$, *vrsta konvergira,*
- $R < 1$, *vrsta divergira.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je $R > 1$. Potem je

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq r > 1$$

za $n \geq n_0$. Za vsak $n \geq n_0$ velja

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \frac{r}{n},$$

oziroma

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}. \tag{1}$$

Naj bo $1 < s < r$. Ker je

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{s(x+1)^{s-1}}{1} = s,$$

je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s - 1}{\frac{1}{n}} = s < r.$$

Če je potrebno, povečamo $n_0$ tako, da vse $n \geq n_0$ velja $(1+\frac{1}{n})^s - 1 < r\frac{1}{n}$, oziroma $(1+\frac{1}{n})^s < 1 + \frac{r}{n}$. Skupaj z neenakostjo (1) za $n \geq n_0$ dobimo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^s}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}$$

in zato

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}.$$

Zmnožimo

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}}\cdots\frac{a_m}{a_{m-1}}<\frac{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s}\frac{\left(\frac{1}{n_0+2}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s}\cdots\frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{m-1}\right)^s}$$

in dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}}<\frac{(\frac{1}{m})^s}{(\frac{1}{n_0})^s},$$

oziroma

$$a_m<\frac{a_{n_0}}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s}\left(\frac{1}{m}\right)^s,\qquad m\geq n_0.$$

Primerjalni kriterij nam pove, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergira, saj je vrsta $\sum(\frac{1}{m})^s$ pri $s>1$ konvergentna.

Naj bo sedaj $R<1$. Zato je

$$R_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\leq 1$$

za vse $n\geq n_0$ in zato

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\leq 1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}.$$

Podobno kot prej za $m\geq n_0$ dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}}\geq\frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n_0}}$$

oziroma

$$a_m\geq\left(\frac{a_{n_0}}{\frac{1}{n_0}}\right)\frac{1}{m}.$$

Vrsta iz členov na desni strani divergira, saj vrsta $\sum\frac{1}{n}$ divergira. Po primerjalnem kriteriju divergira tudi $\sum a_n$. □

Primer 2.17. Poglejmo, ali vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

konvergira.

Poglejmo najprej kvocientni kriterij

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n+3}{(n+2)^2(n+3)^2}}{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n+1)^2}{(2n+1)(n+3)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Ugotovimo, da po tem kriteriju ne moremo soditi o konvergenci te vrste. Uporabimo sedaj Raabejev kriterij. Velja

$$\begin{aligned}
R &= \lim_{n\to\infty} R_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[ n \left( \frac{(2n+1)(n+3)^2}{(2n+3)(n+1)^2} - 1 \right) \right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n^2+16n+6)}{(n+1)^2(2n+3)} \\
&= 3.
\end{aligned}$$

Vrsta je torej konvergentna.

Primer 2.18. Oglejmo si vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

in poskusimo ugotoviti, za katere $x \geq 0$ je vrsta konvergentna.

Pri vrednosti $x = 1$ dobimo harmonično vrsto, za katero že vemo, da divergira. Najprej uporabimo kvocientni kriterij, in sicer

$$\begin{aligned}
a &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)(x+n+1)}}{\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{x+n+1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Pri analizi konvergence nam to ne pomaga, zato uporabimo Raabejev kriterij

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} R_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[ n \left( \frac{x+n+1}{n+1} - 1 \right) \right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left( \frac{nx}{n+1} \right) \\ &= x. \end{aligned}$$

Vrsta je torej konvergentna za vsak $x > 1$, za $x \leq 1$ pa divergentna.

### 2.1.4. Integralski kriterij

Pri integralskem kriteriju ne gre za uporabo primerjalnega kriterija, ampak za prevedbo delnih vsot vrste na bodisi zgornjo oziroma spodnjo Darbuxovo vsoto pri definiciji primernega izlimitiranega integrala. Iz konvergence integrala lahko nato sklepamo na konvergenco vrste.

Izrek 2.19 (Integralski kriterij). *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dana vrsta, pri čemer je* $a_n = f(n), n \in \mathbb{N}$, *kjer je* $f$ *pozitivna, zvezna, monotono padajoča funkcija na intervalu* $[1, \infty)$. *Tedaj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira (divergira) natanko takrat, ko konvergira (divergira) integral*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$

Dokaz. Predpostavimo, da je $f$ neka monotono padajoča funkcija in velja $f(n) = a_n$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Pri dokazu si pomagamo s slikama.

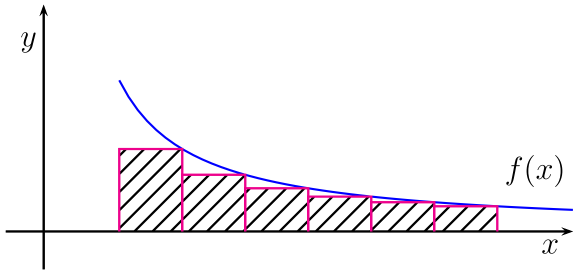
Naj $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira. Delne vsote vrste $a_2 + a_3 + \cdots$ so vsote ploščin pravokotnikov pod grafom (glej sliko 2.1). Po predpostavki integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira, iz česar lahko sklepamo, da je ploščina $p$ neskončnega lika pod grafom funkcije $f(x)$ končna. Delne vsote te vrste $a_2 + a_3 + \cdots$ so tako navzgor omejene z integralom, in torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

V obratno smer predpostavimo, da integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergira. Delne vsote vrste $a_1 + a_2 + \ldots$ so vsote ploščin pravokotnikov nad grafom $f$ (glej sliko 2.2). Ker je ploščina pod grafom funkcije $f(x)$ neskončna, delne vsote vrste niso navzgor omejene. To pomeni, da vrsta divergira.

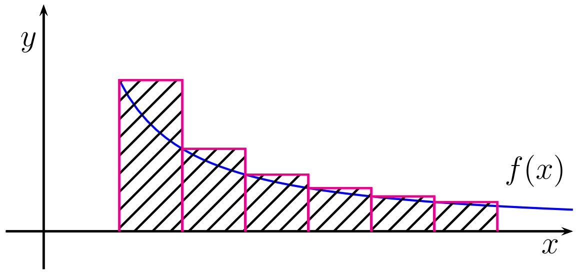
$\square$

Primer 2.20. Preverimo konvergenco vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$




Slika 2.1. Spodnja Riemannova vsota




Slika 2.2. Zgornja Riemannova vsota

Konvergenco vrste bomo preverili z integralskim kriterijem. V integral

$$\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx$$

uvedemo novo spremenljivko $u = \ln x$ $\left(du = \frac{1}{xdx}\right)$

$$\begin{aligned}
\int_e^\infty \frac{1}{x \ln^2 x} dx &= \int_1^\infty \frac{1}{u^2} du \\
&= \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{u^2} du \\
&= \lim_{A \to \infty} \left[ -\frac{1}{u} \right]_1^A \\
&= \lim_{A \to \infty} \left( -\frac{1}{A} + 1 \right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Integral $\int_e^\infty \frac{1}{x \ln x^2} dx$ konvergira, torej tudi vrsta $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^2 n}$ konvergira. Na povsem enak način bi lahko pokazali konvergenco vrste

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln^s n},$$

kjer je $s > 1$.

Poglejmo sedaj vrsto

$$\sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

V integral

$$\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

uvedemo novo spremenljivko, $u = \ln x$:

$$\begin{aligned}
\int_{e}^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx &= \int_{1}^{\infty} \frac{1}{u} du \\
&= \lim_{A \to \infty} \int_{1}^{A} \frac{1}{u} du \\
&= \lim_{A \to \infty} [\ln u]_{1}^{A} \\
&= \lim_{A \to \infty} \ln A \\
&= \infty.
\end{aligned}$$

Po integralskem kriteriju vrsta $\sum_{n=e}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira. Na povsem enak način bi lahko pokazali, da vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^s n}$$

divergira za vsak $s \leq 1$.

Pokazali smo, da vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^s n}$ konvergira natanko tedaj, ko je $s > 1$. Lahko bi se tudi prepričali, da nam Raabejev kriterij ne bi pomagal pri dokazovanju konvergence te vrste.

### 2.1.5. Kummrov kriterij

Kummrov kriterij je zelo močen kriterij za ugotavljanje konvergence. Je precej splošen kriterij in ga lahko uporabimo za izpeljavo drugih kriterijev.

Izrek 2.21 (Kummrov kriterij). *Naj bodo $a_n > 0$, $p_n > 0$, tako da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n}$ divergira, ter naj obstaja limita*

$$\lim_{n \to \infty} \left( p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} \right) = h.$$

*Potem velja:*

- *če je $h > 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira,*
- *če je $h < 0$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Dokaz. Naj bo $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Predpostavimo najprej, da je $h > 0$. Vzemimo nek $r \in (0, h)$. Potem obstaja tak $N > 1$, da velja

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} > r$$

vsak $n \geq N$. Enačbo preuredimo in dobimo

$$p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1} > r a_{n+1}$$

za vsak $n \geq N$. Za $M > N$ to pomeni

$$\begin{aligned}
\sum_{n=N}^{M} (p_n a_n - p_{n+1} a_{n+1}) &> \sum_{n=N}^{M} r a_{n+1}, \\
a_N p_N - p_{M+1} a_{M+1} &> r(s_M - s_{N-1}), \\
p_N a_N - p_{M+1} a_{M+1} + r s_{N-1} &> r s_M, \\
\frac{p_N a_N + r s_{N-1}}{r} &> s_M.
\end{aligned}$$

Ker je N točno določen, je leva stran zgornja meja za $s_M$ in iz tega sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira.

Predpostavimo sedaj, da je $h < 0$ in vrsta $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{p_n}$ divergira. Tako obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$p_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - p_{n+1} < 0$$

za vsak $n \geq N$. To pomeni

$$p_n a_n < p_{n+1} a_{n+1}$$

za vsak $n \geq N$, in zato

$$a_n > p_N a_N \frac{1}{p_n}$$

za vsak $n \geq N$. Ker je $N$ točno določen, nam primerjalni test pokaže, da $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergira. $\square$

Opomba 2.22. Kummrov kriterij ni vedno lahko uporabiti, saj je izbira $p_n$ pogosto precej težavna. Če v Kummrov kriterij vstavimo $p_n = n$, dobimo Raabejev kriterij. Z izbiro $p_n = 1$ za vsak $n$ pa dobimo kvocientni kriterij.

Kot posledico Kummrovega kriterija dobimo Bertrandov kriterij:

Posledica 2.23 (Bertrandov kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^\infty a_n$ vrsta s strogo pozitivnimi členi. Če obstaja limita*

$$B = \lim_{n\to\infty} \left[ \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_n + 1} - 1 \right) - 1 \right) \right],$$

*velja:*

- *če je $B > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira,*

- *če je $B < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Dokaz. V Kummrov test vstavimo $p_n = n \ln n$. S pomočjo integralskega kriterija smo prej pokazali, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira, torej lahko uporabimo Kummrov test, ki nam da željeni rezultat. $\square$

Primer 2.24. Poglejmo si konvergenco vrste

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \cdots$$

Poglejmo si, kaj nam o konvergenci vrste pove Raabejev kriterij. $n$-ti člen vrste je

$$a_n = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)}\right)^2,$$

kvocient $\frac{a_n}{a_{n+1}}$ pa

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2.$$

Tako je

$$R_n = n\Big(\Big(\frac{2n+2}{2n+1}\Big)^2 - 1\Big) = \frac{4n^2+3n}{(2n+1)^2}$$

in velja

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = 1.$$

Po Raabejevem kriteriju torej ne moremo govoriti o konvergenci te vrste.

Poskusimo z Bertrandovim kriterijem:

$$\begin{aligned} B &= \lim_{n\to\infty} \left[\ln n \left(n \left(\frac{a_n}{a_n+1} - 1\right) - 1\right)\right] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[-\ln n \left(\frac{n+1}{(2n+1)^2}\right)\right] \\ &= 0 < 1. \end{aligned}$$

Vrsta torej divergira.

### 2.1.6. Leibnizov kriterij

Leibnizov kriterij je zelo primerno orodje pri dokazovanju konvergence alternirajočih vrst.

Izrek 2.25 (Leibnizov kriterij). *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ alternirajoča vrsta, t.j.* $\operatorname{sign}(a_{n+1}) = -\operatorname{sign}(a_n)$ *za vsak $n \in \mathbb{N}$, in naj bo $|a_1|, |a_2|, \ldots$ padajoče zaporedje z limito 0. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*

Dokaz. Naj bo $b_n = |a_n|$. Privzamemo, da je $a_1 < 0$. Torej $a_1 = -b_1$. Naša vrsta je tako $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$, kjer je $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Naj bo $s_n$ $n$-ta delna vsota vrste $-b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - \cdots$ Velja

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{b_{2n} - b_{2n-1}}_{\geq 0}$$

torej

$$s_{2n+1} \geq s_{2n-1}.$$

Podobno

$$s_{2n+2} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2}$$

in

$$s_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Sledi $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \ldots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$. Torej je zaporedje $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$. Podobno obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s''$, saj je $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče in navzdol omejeno. Jasno je $s' \leq s''$. Ker je

$$\begin{aligned} s' - s'' &= \lim_{n\to\infty} s_{2n-1} - s_{2n} \\ &= \lim_{n\to\infty} -b_{2n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

sledi $s' = s'' = s$, torej $\lim_{n\to\infty} s_n = s$.

□

Primer 2.26. Poglejmo konvergentnost alternirajoče harmonične vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Iz Leibnizovega izreka sledi, da je vrsta konvergentna, vemo pa, da ni absolutno konvergentna. Torej je pogojno konvergentna.

Konvergenco alternirajoče harmonične vrste znamo določiti tudi s pomočjo razvoja logaritemske funkcije v Taylorjevo vrsto, in sicer

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots$$

Za $|x| < 1$ velja, da vrsta konvergira, za $|x| > 1$ pa vrsta divergira. Z uporabo Abelovega izreka na Taylorjevi vrsti pa vidimo, da velja

$$\ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

## 2.2. Divergenca vrste $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$

Včasih naletimo na primer, kjer kriteriji za ugotavljanje konvergence vsi po vrsti odpovejo, oziroma jih zaradi narave vrste niti ne znamo uporabiti. Kot zanimiv primer si bomo ogledali vrsto $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$, kjer je $\mathbb{P}$ množica praštevil

PRIMER 2.27. Poglejmo si vrsto $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$, kjer je $p$ praštevilo:

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots .$$

Zanima nas konvergenca vrste.

Predpostavimo, da vrsta konvergira. Torej je za dovolj velike $k$

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_j} < \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Naj bo $A_m$ množica tistih $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ,, ki niso deljivi z nobenim praštevilom iz množice $\{p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots\}$. Vsak $n \in A_m$ lahko pišemo kot $n = r \cdot q^2$. Za $r$ imamo le $2^k$ možnosti, za $q$ pa imamo največ $\sqrt{m}$ možnosti. Velja torej

$$|A_m| \leq 2^k \sqrt{m}. \tag{3}$$

Imejmo še množico $\{1, 2, 3, \ldots, m\} \setminus A_m$. To so vsa tista števila, ki so deljiva s kakšnim $p_{k+1}, p_{k+2}, \ldots$ Naj bo $B_{m,j} = \{n \in \{1, 2, \ldots, m\}\,; p_j | n\}$. Tedaj velja

$$\{1, 2, \ldots, m\} \setminus A_m = \bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_{m,j}$$

in

$$|B_{m,j}| \leq \frac{m}{p_j}.$$

Iz tega sledi, da je

$$|\{1, 2, \ldots, m\} \setminus A_m| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |B_{m,j}| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{m}{p_j}.$$

Iz (2) sledi

$$|\{1, 2, \ldots, m\} \setminus A_m| \leq \frac{m}{2}$$

in zato

$$|A_m| \geq \frac{m}{2}.$$

Skupaj z (3) dobimo

$$\frac{m}{2} \leq |A_m| \leq 2^k \sqrt{m},$$

kar privede do protislovja, če je

$$m > 2^{2k+2}.$$

POGLAVJE 3

# Neskončni produkt

Podobno kot v matematiki obravnavamo neskončne vrste, lahko obravnavamo tudi neskončne produkte. Omejili se bomo na neskončne produkte realnih števil, čeprav bi bila teorija povsem analogna pri obravnavi produktov kompleksnih števil. V tem poglavju je snov v večini vzeta iz knjige J. M. Hyslop, *Infinite Series.* Pri pisanju sem si pomagala še s T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series* in I. Vidav, *Višja matematika 1.*

DEFINICIJA 3.1. Imejmo zaporedje realnih števil $u_1, u_2, u_3, \ldots$ Formalnemu produktu členov $u_1, u_2, u_3, \ldots$ rečemo *neskončni produkt* ter ga zapišemo kot

$$u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Pri zgornji definiciji gre zgolj za formalni produkt. S konvergenco se bomo ukvarjali v nadaljevanju. Kot bomo videli, se iz deloma tehničnih razlogov konvergenca produkta obravnava nekoliko bolj previdno kot pri vrstah.

## 3.1. Delni produkti

Naj bo

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots$$

formalen neskončni produkt. Vsak končen nabor členov lahko brez težav zmnožimo in dobimo zaporedje

$$\begin{aligned}
&P_1 = u_1 \\
&P_2 = u_1 \cdot u_2 \\
&P_3 = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \\
&\ldots\ldots \\
&P_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n \\
&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Zaporedje $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots$ imenujemo *zaporedje delnih produktov.* Poglejmo si nekaj primerov.

Primer 3.2. Vzemimo neskončni produkt

$$\prod_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k(k+1)}}.$$

Delni produkt $P_n$ je enak

$$P_n = e^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}} = e^{1-\frac{1}{k+1}}.$$

V limiti dobimo

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = e.$$

V tem primeru je razlog za konvergenco delnih produktov v tem, da so členi neskončnega produkta v limiti dovolj blizu 1 in število $e$ lahko smiselno razumemo kot rezultat neskončnega produkta.

Primer 3.3. Vzemimo neskončni produkt

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots$$

Delni produkt $P_n$ je enak

$$P_n = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{2}}_{n} = \frac{1}{2^n}.$$

V limiti dobimo

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = 0.$$

V tem primeru je razlog za konvergenco delnih produktov drugačen kot v prejšnjem primeru, saj je konvergenca posledica dejstva, da so vsi členi neskončnega produkta (vsaj od nekje dalje) po absolutni vrednosti manjši od nekega števila, ki je strogo manjše od 1. Pri vsakem takem produktu bodo delni produkti konvergirali proti 0. Čeprav bi se lahko odločili in tak neskončen produkt obravnavali kot konvergenten, za take produkte raje rečemo, da *divergirajo proti 0.*

Primer 3.4. Kadar koli je vsaj eden izmed členov v neskončnem produktu enak 0, bodo vsi delni produkti od nekje dalje enaki 0, zato bo tudi limita delnih produktov enaka 0. Za tak produkt bomo rekli, da je konvergenten, samo če bi tudi v primeru, ko katerega od teh ničelnih členov odstranimo iz neskončnega produkta, za tak reduciran produkt rekli, da je konvergenten. Tako bomo na primer rekli, da je produkt

$$0 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdots$$

konvergenten (proti 0), produkt

$$0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots$$

pa divergenten, čeprav je limita delnih produktov pri obeh neskončnih produktih enaka 0.

## 3.2. Konvergenca neskončnega produkta

Ko govorimo o konvergenci neskončnega produkta, želimo neskončnemu produktu pripisati neko vrednost. Tako smo ravnali že pri neskončnih vrstah, vendar pa moramo biti pri neskončnem produktu previdnejši. Preprosto bi lahko sklepali, da je neskončen produkt konvergenten, če konvergira zaporedje delnih produktov, analogno kot pri neskončnih vrstah. Problem nastane, če je kateri od členov neskončnega produkta $u_1, u_2, u_3, \ldots$ enak 0, saj so v tem primeru vsi delni produkti od nekje dalje enaki 0, ne glede na to, kakšni so neničelni členi produkta. Prav tako nekoliko drugače obravnavamo produkte, katerih delni produkti konvergirajo proti 0.

Definicija 3.5. Neskončni produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots ,$$

za katerega velja $u_n \neq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$, je *konvergenten*, če je konvergentno zaporedje delnih produktov $P_1, P_2, P_3, \ldots$, in velja $\lim_{n\to\infty} P_n = P \neq 0$. Zapišemo

$$\prod_{n=1}^{\infty} P_n = P.$$

Če vsi faktorji produkta $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ niso različni od 0, rečemo, da je neskončni produkt *konvergenten proti 0*, če obstaja tako število $N \in \mathbb{N}$, da velja

- $u_n \neq 0$ za vsak $n > N$ in je
- $\prod_{k=N+1}^{\infty} P_k = P(N)$ neničelno realno število.

V vseh ostalih primerih rečemo, da neskončni produkt *divergira*.

Opomba 3.6. Zgornja definicija nam zagotavlja, da za konvergentne neskončne produkte velja

$$P = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \ldots \cdot u_n \cdot P(N)$$

in

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdots u_N \cdot P(N),$$

kjer je

$$P(N) = \prod_{k=n+1}^{\infty} u_k,$$

in je $N$ poljubno naravno število.

Poglejmo si nekaj primerov neskončnih produktov.

Primer 3.7. Ali neskončni produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots$$

konvergira?

Najprej poglejmo $n$-ti delni produkt tega neskončnega produkta:

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right).$$

Uporabimo $(1-a^2)=(1-a)(1+a)$ in dobimo

$$P_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 2\cdots n\cdot 3\cdot 4\cdots(n+2)}{2\cdot 3\cdots(n+1)\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}=\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}.$$

Torej je

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{n+2}{n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

in zato

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

Primer 3.8. Pokažimo, da neskončni produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

divergira.

Poglejmo si $n$-ti delni produkt

$$P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)=(1+1)\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n+1}{n}=n+1$$

Limita $n$-tega delnega produkta je

$$P=\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

Torej produkt res divergira.

Primer 3.9. Poglejmo še neskončni produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

in njegovo konvergenco.

Njegov $n$-ti delni produkt je

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n+1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

sledi

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

Neskončni produkt torej divergira k 0.

Izrek 3.10 (Cauchyjev kriterij za produkt). *Neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $N$, da za $n > N$ velja*

$$|u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdot\ldots u_{n+k} - 1| < \varepsilon, \quad \textit{za } k = 1,2,3,\ldots$$

Dokaz. Predpostavimo, da produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira. Nadalje lahko predpostavimo, da noben člen $u_n$ ni enak 0. Naj bo $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje delnih produkt in $P = \lim_{n\to\infty} P_n$ vrednost produkta. Ker je $P \neq 0$, obstaja tak $M > 0$, da velja $|P_n| > M$ za vsak $n$. Naj bo sedaj $\varepsilon > 0$. Zaporedje $\{P_n\}$ zadošča Cauchyjevemu pogoju, zato obstaja tak $N \in \mathbb{N}$, da velja

$$|P_{n+k} - P_n| < \varepsilon M$$

za vsak $n > N$ in vsak $k = 1, 2, 3, \ldots$ zato

$$|u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdots u_{n+k} - 1| = \frac{1}{|P_n|}|P_{n+k} - P_n| < \frac{1}{|P_n|}M\varepsilon < \varepsilon.$$

Pokažimo še obratno. Recimo, da pogoj

$$|u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdot\ldots\cdot u_{n+k} - 1| < \varepsilon$$

velja za vsak $k = 1, 2, \ldots$ in vsak $n > N$. Potem za $n > N$ velja $u_n \neq 0$. Vzemimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Definirajmo za $n > N$

$$Q_n = u_{N_0+1}\cdot u_{N_0+2}\cdot\ldots\cdot u_n.$$

Ker velja $\frac{1}{2} < |Q_n| < \frac{3}{2}$, zaporedje $Q_n$ zagotovo ne konvergira proti 0. Pokažemo, da $\{Q_n\}$ konvergira. Vzamemo poljubni $\varepsilon > 0$:

$$\left|\frac{Q_{n+k}}{Q_n} - 1\right| = |u_{n+1}\cdot u_{n+2}\cdot\ldots\cdot u_{n+k} - 1| < \varepsilon.$$

Zato je

$$|Q_{n+k} - Q_n| < \varepsilon |Q_n| < \frac{3}{2}\varepsilon,$$

kar pomeni, da zaporedje $\{Q_n\}$ zadošča Cauchyjevemu pogoju in zato konvergira. To pomeni, da produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira. $\square$

Če vstavimo $k = 1$ v $|u_{n+1} \cdot u_{n+2} \cdot \ldots \cdot u_{n+k} - 1| < \varepsilon$ ugotovimo, da konvergenca produkta $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ pomeni $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Posledica 3.11. *Naj bo neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergenten. Potem velja* $\lim_{n\to\infty} u_n = 1$.

Ta pogoj je potreben za konvergenco produkta, ni pa zadosten, saj na primer produkt $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ divergira, čeprav zaporedje $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ konvergira proti 1.

## 3.3. Prevedba konvergence neskončnega produkta na konvergenco vrst

V prejšnjem razdelku smo videli, da je potreben pogoj za konvergenco vrst, da členi vrste konvergirajo proti 1. Ker je konvergenca vrste neodvisna od začetnih členov produkta, bomo predpostavili, da so produkti oblike

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$$

kjer so vsi $a_n > -1$. Naj bo $\{P_n\}$ zaporedje delnih produktov in naj bo zaporedje $\{S_n\}$ zaporedje delnih vsot vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n).$$

Ker velja

$$\log P_n = \log\left(\prod_{k=1}^{n}(1 + a_k)\right) = \sum_{k=1}^{n} \log(1 + a_k) = S_k,$$

dobimo naslednji izrek.

Izrek 3.12. *Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$, $a_n > -1$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $\sum_{k=1}^{n}(1 + a_n)$.*

Opomba 3.13. Produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$, $a_n > -1$ divergira proti ničli natanko tedaj, ko vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1 + a_n)$ divergira proti $-\infty$.

S pomočjo uporabe približka $\log u_n = \log(1 + a_n) \approx -a_n$, lahko v določenih primerih zgornji kriterij poenostavimo.

Izrek 3.14. *Naj bo $a_n \geq 0$, potem neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dokaz. Naj bo $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Predpostavimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira in ima vsoto $S$. Označimo z $\{P_n\}$ zaporedje delnih produktov $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ in z $\{S_n\}$ zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ker za $x \geq 0$ velja $1+x \leq e^x$, je $\log(1+x) \leq x$ za $x \geq 0$ in dobimo

$$\log \prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = \sum_{k=1}^{n} \log(1+a_k) \leq \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n \leq S, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

To pomeni

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k) = P_n \leq e^S, \quad \text{za vsak } n \in \mathbb{N}.$$

Zaporedje $\{P_n\}$ je torej navzgor omejeno. Ker so $a_n > 0$, je tudi naraščajoče in zato konvergira k limiti $P$, za katero velja

$$P \leq e^S.$$

Pokažimo še obrat. Naj produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ konvergira proti $P$. Ker velja

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n < (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)\ldots(1+a_n) \leq P,$$

je zaporedje $\{S_n\}$ navzgor omejeno in naraščajoče, zato vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. □

Izrek 3.15. *Naj bo $-1 < a_n \leq 0$, potem neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dokaz. Naj bo $-1 < a_n \leq 0$. Definirajmo $b_n = -a_n$. Tako velja $0 \leq b_n < 1$ za vsak $n$, neskončni produkt zapišemo

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n).$$

Ker velja $1 - x \leq e^{-x}$ za $0 \leq x < 1$, imamo

$$0 < P_n \leq e^{-(b_1+b_2+\ldots+b_n)}.$$

Če torej vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergira, potem $P_n \to 0$, kar pomeni, da produkt divergira proti 0. Predpostavimo torej, da je vrsta $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergentna. Potem glede na $\varepsilon$ lahko najdemo tak $N = N(\varepsilon)$, da velja

$$0 \leq \sum_{k=N}^{\infty} b_k < \varepsilon.$$

Prav tako

$$\begin{aligned}
(1-b_N)(1-b_{N+1}) &\geq 1 - b_N - b_{N+1}, \\
(1-b_N)(1-b_{N+1})(1-b_{N+2}) &\geq (1-b_N-b_{N+1})(1-b_{N+2}) \\
&\geq 1 - b_N - b_{N+1} - b_{N+2}
\end{aligned}$$

zato za $n > N$ velja

$$(1-b_N)(1-b_{N+1})\dots(1-b_n) \geq 1-b_N-b_{N+1}\dots-b_n > 1-\varepsilon.$$

$\frac{P_n}{P_{N+1}}$ je monotono padajoče. Pokazali smo, da ima pozitivno spodnjo mejo. Iz tega sledi, da $P_n$ konvergira proti končni neničelni limiti, kar pomeni, da $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergira. $\square$

Če niso vsi členi produkta $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ bodisi večji od 1 ali manjši od 1, torej $-1 < a_n$, ne moremo problema konvergence produkta vedno prevesti na problem konvergence vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, kar lahko vidimo iz naslednjih dveh primerov.

Primer 3.16. Poglejmo si produkt

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots$$

Poglejmo si lihi delni produkt $P_{2k+1}$. Ker velja

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) < 1-\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}},$$

velja

$$P_{2k+1} < \left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\prod_{j=1}^{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2j+1}\sqrt{2j+2}}\right).$$

Ker vrsta

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2j+1}\sqrt{2j+2}}$$

divergira proti $\infty$, tudi delni produkti $P_{2k+1}$ konvergirajo proti 0, zato produkt divergira proti 0.

Poglejmo še vrsto

$$\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{5}}+\dots$$

in primerjajmo njeno konvergenco s konvergenco pripadajočega produkta. Imamo alternirajočo vrsto, katere členi $|a_1|, |a_2|, |a_3|, \dots$ nam dajo padajoče zaporedje z limito 0. Po Leibizovem kriteriju naša vrsta konvergira.

Primer 3.17. Poglejmo si produkt

$$\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots$$

Če v produkto zmnožimo po dva zaporedna člena, dobimo produkt

$$\left(1+\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(1+\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{4\sqrt{4}}\right)\cdots$$

Ta produkt konvergira, saj konvergira vrsta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$

Zato konvergira tudi prvotni produkt. Pripadajoča vrsta

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

pa je divergentna.

Definicija 3.18. Če neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ konvergira, potem rečemo, da neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ *konvergira absolutno.* Če produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergira, produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ pa divergira, rečemo, da produkt *konvergira pogojno.*

Trditev 3.19. *Naj neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ konvergira absolutno. Potem $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergira.*

Dokaz. Dokaz sledi iz Cauchyjevega kriterija in naslednje neenakosti:

$$|(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) \cdots (1 + a_{n+k}) - 1| \leq (1+|a_{n+1}|)(1+|a_{n+2}|) \cdots (1+|a_{n+k}|)-1.$$

□

Izrek 3.20. *Neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergira absolutno natanko takrat, ko vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira absolutno.*

Dokaz. Po izrekih 3.14 in 3.15 neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + |a_n|)$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. To pa smo želeli dokazati. □

Opomba 3.21. Videli smo, da je absolutna konvergenca vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekvivalentna absolutni konvergenci produkta $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$. Enaka trditev pa ne velja na splošno za pogojno konvergenco, kot smo videli iz zgornjih primerov. Lahko pa dokažemo naslednji izrek.

Izrek 3.22. *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Potem neskončni produkt $\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n)$ konvergira natanko takrat, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

Dokaz. Ker vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergira, obstaja tak $N$, da velja $|a_n| < \frac{1}{2}$ za $n > N$. Ker vemo, da velja $\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$ za $|x| < 1$, za vsak $n$ torej velja tudi

$$\begin{aligned}
|\log(1 + a_n) - a_n| &= \left| \frac{a_n^2}{2} - \frac{a_n^3}{3} + \cdots \right| && (4)\\
&=\leq \frac{1}{2} a_n^2 \left(1 + |a_n| + |a_n|^2 + \cdots\right) && (5)\\
&= \frac{a_n^2}{2(1 - |a_n|)} && (6)\\
&< a_n^2. && (7)
\end{aligned}$$

Iz tega sledi, da je vrsta $\sum |\log(1+a_n) - a_n|$ konvergentna, torej je tudi vrsta $\sum \big(\log(1+a_n) - a_n\big)$ konvergentna. Torej $\log P_n - A_n$ gre proti končni vrednosti. Torej zgornji izrek velja. $\square$

Kot posledico zgornjih izrekov navedimo zanimiv rezultat iz teorije vrst.

POSLEDICA 3.23. *Naj bodo $a_n > -1$ za vsak $n = 1, 2, \ldots$ Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+a_n)$ konvergira natanko tedaj, ko konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, če je izpolnjen eden od naslednjih pogojev:*

- *$a_n \geq 0$ za vsak $n = 1, 2, \ldots,$*
- *$-1 < a_n \leq 0$ za vsak $n = 1, 2, \ldots,$*
- *$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$*

POGLAVJE 4

# Wallisov produkt

V tem poglavju bomo pokazali, kako na iznajdljiv način predstaviti $\pi$ kot neskončen produkt. Leta 1655 je to slavno formulo odkril angleški matematik John Wallis. Po njem se imenuje Wallisov produkt in se zapiše

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdots=\frac{\pi}{2}.$$

Dokaz Wallisovega produkta bomo izpeljali na tri načine. Najprej bom dokazala Wallisov produkt na standardni način, z ocenjevanjem določenih integralov sinusne funkcije. Wallisov produkt pa se da dokazati tudi z uporabo osnovne algebre, Pitagorovega izreka in formulo ($\Pi r^2$) kot območje kroga s polmerom $r$. Lahko bi rekli, da bomo dokazali produkt z uporabo (osnovnošolske matematike) matematike na osnovnošolski stopnji. Tretji dokaz Wallisovega produkta bo s pomočjo razvoja sinusne funkcije v produkt.

## 4.1. John Wallis

John Wallis (1616–1703) je angleški matematik, ki je prispeval pomemben delež k razvoju matematike. Bil je eden vplivnejših, vsestranskih in sposobnih angleških matematikov pred Isaacom Newtonom (1642–1727).

Wallis se je v matematiki loteval različnih problemov. Prispeval je kar nekaj temeljev, ki so pozneje v matematiki igrali pomembno vlogo. Pri obravnavanju stožnic je med prvimi uporabljal analitično geometrijo. Wallis je znatno prispeval tudi k trigonometriji in analizi neskončnih vrst. Uvedel je pojem verižnega ulomka. V analizi je bil predhodnik infinitezimalnega računa. Veliko se je ukvarjal z integralskim računom, s čimer je Isaacu Newtonu dal pomembno osnovo za njegovo delo. Izračunal je integral eksponentne funkcije za različne eksponente (pozitivne ali negativne, cele ali racionalne). Wallis je bil med prvimi, ki je razumel pomen ničle ter neskončnosti, uvedel pa je tudi simbol neskončnsti ($\infty$), ki velja še danes. Leta 1659 je izdal knjigo o stožnicah *Arithmetica infinitorum*, v kateri je sistematiziral tedanje delo Descartesa in Cavalierija. V knjigi je prvič razložen pomen potence $x^n$. Razumel je tudi pomen ulomljenih in negativnih eksponentov. Hkrati se je ukvarjal z reševanjem kvadrature kroga in določil $\pi$ v obliki po njem imenovanega neskončnega produkta – Wallisov produkt, ki ga bomo obravnavali v nadaljevanju.

Ukvarjal se je tudi s fiziko, pisal je o statiki in dinamiki elastičnih trkov. Skupaj še z nekaterimi matematiki se je sredi 50. let 17. stoletja zapletel v polemiko glede matematičnih in logičnih osnov razumevanja sveta. Izkazal se je tudi v pisanju zgodovine matematike. Leta 1673 je izšlo njegovo delo *De algebra tractatus; historicus et practicus*, kar je v Angliji prvi resni poskus pisanja o zgodovini matematike.

Johna Wallis je bil torej vsestranski matematik, ki je prispeval pomemben delež k razvoju matematike, mi pa se bomo osredotočili na Wallisov produkt. Več o J. Wallisu si lahko bralec prebere v [**2**].

## 4.2. Dokaz Wallisovega produkta z ocenjevanjem določenih integralov sinusne funkcije

Najprej bomo dokazali Wallisov produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}\right)=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots=\frac{\pi}{2}.$$

z ocenjevanjem določenih integralov sinusne funkcije:

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx.$$

Ta način dokazovanja je najpogosteje najden v literaturi. Mi se bomo v tem razdelku naslonili na knjigo I. Vidav, *Višja matematika 1.*

Izračunajmo najprej $I_0$ in $I_1$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^0 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0=1.$$

Za $n\geq 2$ imamo

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}x\cdot\sin x\,dx.$$

Uporabimo integracijo po delih in dobimo

$$I_n=-(\sin^{n-1}x\cdot\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx$$

ter preuredimo

$$I_n=0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\cdot\sin^{n-2}x\,dx=$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,dx=$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\, dx - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx =$$

$$= (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n.$$

Izrazimo $I_n$ in dobimo rekurzivno zvezo

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Za sode $n$ velja

$$I_n = \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} I_0 = \frac{(n-1)!!}{n!!}\frac{\pi}{2},$$

za lihe $n$ pa

$$I_n = \frac{(n-1)\cdot(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} I_1 = \frac{(n-1)!!}{n!!}.$$

Za $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ velja

$$\sin^{2n-1} x \geq \sin^{2n} x \geq \sin^{2n+1} x,$$

dobimo neenakost

$$I_{2n-1} \geq I_{2n} \geq I_{2n+1},$$

kar pomeni

$$\frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!} \geq \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} \geq \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

Neenakost lahko preprosto preoblikujemo v

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n} \geq \frac{\pi}{2} \geq \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \frac{1}{2n+1}.$$

Ker velja

$$\frac{1}{2n}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 - \frac{1}{2n+1}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{(2n)(2n+1)}\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 \leq \frac{\frac{\pi}{2}}{2n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

smo dobili

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \frac{\pi}{2}.$$

Delni produkti v Wallisovem produktu torej konvergirajo proti $\pi/2$.

## 4.3. Elementarni dokaz Wallisovega produkta

V tem razdelku bomo predstavili elementarni dokaz Wallisovega produkta, povzeto po J. Wastlund, *An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for pi.* Poleg elementarne algebre v dokazu uporabimo zgolj Pitagorov izrek in formulo za ploščino kroga.

Poglejmo si zaporedje števil

$$p_1 = 1$$

in za $n \geq 2$

$$p_2 = \frac{3}{2}$$

$$p_3 = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$$

$$\cdots$$

$$p_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n-2}.$$

Delni produkt neskončnega (Wallisovega) produkta $\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots$ z lihim številom členov lahko zapišemo

$$l_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2 \cdot 2n}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-1)^2} = \frac{2n}{{p_n}^2},$$

delni produkt s sodim številom členov pa kot

$$s_n = \frac{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot \ldots \cdot (2n-2)^2}{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (2n-3)^2 \cdot (2n-1)} = \frac{2n-1}{{p_n}^2}.$$

Definirajmo še $s_1 = 1$. Jasno je, da je $s_n < s_{n+1}$ in $l_n > l_{n+1}$. Ko primerjamo $l_n$ in $s_n$, lahko vidimo $s_n < l_n$. Tako velja

$$s_1 < s_2 < s_3 < \cdots < l_3 < l_2 < l_1. \tag{8}$$

Za poljuben $i$, $1 \leq i \leq n$ velja

$$\frac{2i-1}{{p_i}^2} = s_i \leq s_n \qquad \text{in} \qquad \frac{2i}{{p_i}^2} = l_i \geq l_n$$

in zato

$$\frac{2i-1}{s_n} \leq {p_i}^2 \qquad \text{in} \qquad \frac{2i}{l_n} \geq {p_i}^2.$$

Skupaj dobimo oceno

$$\frac{2i-1}{s_n} \leq {p_i}^2 \leq \frac{2i}{l_n}. \tag{9}$$

Zadnja vrstica velja tudi za $i = 0$, hkrati pa lahko vpeljemo še $p_0 = 0$. Razliko $p_{n+1} - p_n$ pa označimo z $a_n$. Tako velja $p_1 - p_0 = a_0 = 1$ in za $n \geq 1$ velja

$$a_n = p_{n+1} - p_n = p_n \left( \frac{2n+1}{2n} - 1 \right) = \frac{p_n}{2n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}.$$

Trditev 4.1. *Za vsak $i, j \geq 0$ velja*

$$a_i a_j = \frac{j+1}{i+j+1} a_i a_{j+1} + \frac{i+1}{i+j+1} a_{i+1} a_j$$

Dokaz. Izrazimo

$$a_{i+1} = \frac{2i+1}{2(i+1)} a_i$$

in

$$a_{j+1} = \frac{2j+1}{2(j+1)} a_j,$$

in dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{j+1}{i+j+1} a_i a_{j+1} + \frac{i+1}{i+j+1} a_{i+1} a_j &= \frac{2j+1}{2(j+1)} \cdot \frac{j+1}{i+j+1} a_i a_j + \frac{2i+1}{2(i+1)} \cdot \frac{i+1}{i+j+1} a_i a_j \\
&= a_i a_j \left( \frac{2j+1}{2(j+1)} \cdot \frac{j+1}{i+j+1} + \frac{2i+1}{2(i+1)} \cdot \frac{i+1}{i+j+1} \right) \\
&= a_i a_j.
\end{aligned}$$

□

Trditev 4.2. *Za vsak $n \geq 0$ velja*

$$1 = a_0 a_n + a_1 a_n + \cdots + a_n a_0.$$

Dokaz. Enakost dokažemo z indukcijo. Z uporabo Trditve 4.1 dobimo

$$1 = {a_0}^2 = a_0 a_1 + a_1 a_0.$$

Predpostavimo sedaj, da velja $1 = a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0$. Zopet uporabimo Trditev 4.1

$$\begin{aligned}
1 &= a_0 a_{n-1} + \cdots + a_{n-1} a_0 \\
&= \left( a_0 a_n + \frac{1}{n} a_1 a_{n-1} \right) + \left( \frac{n-1}{n} a_1 a_{n-1} + \frac{2}{n} a_2 a_{n-2} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} a_{n-1} a_1 + a_n a_0 \right) \\
&= a_0 a_n + \cdots + a_n a_0.
\end{aligned}$$

□

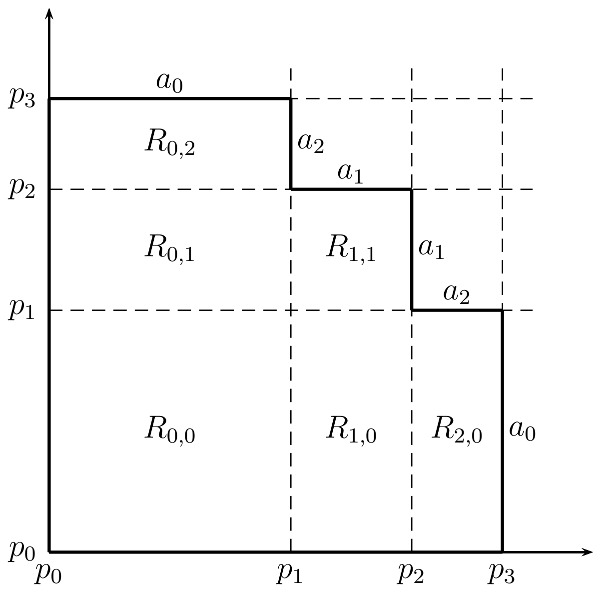
V prvem kvadrantu koordinatnega sistema vzporedno tako z $x$ osjo kot z $y$ osjo narišemo poltrake na oddaljenostih $p_n$

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0 \\
p_1 &= 1 \\
p_2 &= \frac{3}{2} \\
p_3 &= \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8} \\
&\cdots
\end{aligned}$$

Z $R_{i,j}$ označimo pravokotnike, katerih spodnje levo oglišče je $(p_i, p_j)$, zgornje desno oglišče pa $(p_{i+1}, p_{j+1})$ (glej sliko 4.1). Ploščina $\mathrm{pl}(R_{i,j})$ pravokotnika $R_{i,j}$ je ravno $a_i a_j$. Iz Trditve 4.2 dobimo

$$\sum_{i+j=n} \mathrm{pl}(R_{i,j}) = a_0 a_n + a_1 a_n + \cdots + a_n a_0 = 1. \tag{10}$$

S $P_n$ označimo območje, ki je sestavljeno iz tistih pravokotnikov $R_{i,j}$, za katere velja $i + j < n$. Iz (10) sledi, da je ploščina območja $P_n$ enaka $n$.




Slika 4.1. Ploščina območja $P_3$.

Zunanja oglišča območja $P_n$ so točke $(p_i, p_j)$, za katere velja $i + j = n + 1$ in $1 \leq i, j \leq n$. Po Pitagorovem izreku lahko vsako razdaljo takega oglišča od izhodišča izračunamo

$$\sqrt{{p_i}^2 + {p_j}^2}.$$

Po formuli (9)

$$\frac{2i-1}{s_n} \leq {p_i}^2 \leq \frac{2i}{l_n}$$

je ta razdalja $\sqrt{{p_i}^2 + {p_j}^2}$ navzgor omejena z

$$\sqrt{\frac{2(i+j)}{l_n}} = \sqrt{\frac{2(n+1)}{l_n}}.$$

Podobno velja za notranja oglišča območja $P_n$, to so točke $(p_i, p_j)$, za katere je $i+j=n$ in $0 \le i, j \le n$. Razdalja take točke od izhodišča je navzdol omejena z

$$\sqrt{\frac{2(i+j-1)}{s_n}} = \sqrt{\frac{2(n-1)}{s_n}}.$$

Zato $P_n$ vsebuje četrtino kroga s polmerom $\sqrt{\frac{2(n-1)}{s_n}}$ in je vsebovan v četrtino kroga z radijem $\sqrt{\frac{2(n-1)}{l_n}}$. Ker je površina kroga z radijem $r$ enaka $\frac{\pi r^2}{4}$, medtem ko je površina območja $P_n$ enaka $n$, dobimo oceno

$$\frac{(n-1)\pi}{2s_n} < n < \frac{(n+1)\pi}{2l_n},$$

iz česar sledi

$$\frac{(n-1)\pi}{2n} < s_n < l_n < \frac{(n+1)\pi}{2n}.$$

Ko pošljemo $n$ proti neskončno, tako $s_n$ kot $l_n$ konvergirata proti $\frac{\pi}{2}$.

### 4.4. Dokaz Wallisovega produkta s pomočjo Eulerjevega produkta za funkcijo sinus

V tem razdelku bomo dokazali Eulerjev razvoj sinusne funkcije.

$$\frac{\sin \pi x}{\pi x} = \left(1-x^2\right)\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\left(1-\frac{x^2}{9}\right)\cdots = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2}\right).$$

Wallisova formula nato neposredno sledi, če v Eulerjev produkt vstavimo $x = \frac{\pi}{2}$. Dokaz formule je povzet po članku K. Venkatachaliengar, *Elementary Proofs of the Infinite Product for Sin Z and Allied Formulae.*

Za vsak realen $z$ definirajmo

$$I_n(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(zx)\cos^n x \, dx.$$

Za reševanje tega integrala uporabimo integracijo po delih ($\int u dv = uv - \int v du$):

$$u = \cos^n x, \quad dv = \cos(zx)\, dx$$

in

$$du = -n\cos^{n-1} x \sin x \, dx, \quad v = \frac{1}{z}\sin(zx)\, dx.$$

Dobimo

$$I_n(z) = \left(\frac{1}{z}\cos^n x \sin(zx)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n}{z}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(zx)\cos^{n-1} x \sin x \, dx$$

ter enakost množimo z $z$

$$zI_n(z) = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(zx)\cos^{n-1} x \sin x \, dx.$$

Ponovna uporaba per-partes

$$u = \cos^{n-1} x \sin x, \quad dv = \sin(zx)\,dx$$

$$du = \big(\cos^n x - (n-1)\cos^{n-2} x(1-\cos^2 x)\big)\,dx, \quad v = -\frac{1}{z}\cos(zx).$$

nam da za vsak $n \geq 2$ rekurzivno enakost

$$n(n-1)I_{n-2}(z) = (n^2 - z^2)I_n(z). \tag{11}$$

Ker je $I_n(0) > 0$, za vsak $n \geq 0$, je enakost za $n \geq 2$ ekvivalentna

$$\frac{I_{n-2}(z)}{I_{n-2}(0)} = \frac{(n^2 - z^2)I_n(z)}{n(n-1)I_{n-2}(0)}$$

in zaradi $I_{n-2}(0) = \frac{n^2}{n(n-1)}I_n(0)$, (11), je

$$\frac{I_{n-2}(z)}{I_{n-2}(0)} = \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\frac{I_n(z)}{I_n(0)}, \qquad n \geq 2. \tag{12}$$

Pri $n = 0$ funkcije lahko integrale preprosto izračunamo

$$I_0(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{1}{2}\pi,$$

$$I_0(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(zx)\,dx = \frac{1}{z}\sin z\frac{\pi}{2}.$$

Z večkratno uporabo rekurzije (12) v točki $z/2$ dobimo za vsak $n \geq 1$ enakost

$$\frac{I_0(z/2)}{I_0(0)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)\frac{I_{2n}(z/2)}{I_{2n}(0)}. \tag{13}$$

Dokažimo sedaj, da velja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(z)}{I_n(0)} = 1.$$

$$\begin{aligned}
|I_n(0) - I_n(z)| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(zx)\cos^n x\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(zx))\cos^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin^2\frac{zx}{2}\cos^n x\,dx \\
&\leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}|zx|^2\cos^n x\,dx = \frac{1}{2}|z|^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^n x\,dx.
\end{aligned}$$

Ker za $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ velja $x \leq \tan x$, lahko naprej ocenimo

$$\begin{aligned}
|I_n(0) - I_n(z)| &\leq \frac{1}{2}|z|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^n x \, dx \\
&\leq \frac{1}{2}|z|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^n x \tan x \, dx \\
&= \frac{1}{2}|z|^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^{n-1} x \sin x \, dx \\
&= \frac{1}{2}|z|^2 \left( \left( -\frac{x}{n} \cos^n x \right) \Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \right) \\
&= \frac{|z|^2}{2n} I_0(z).
\end{aligned}$$

Tako imamo

$$\left| \frac{I_n(0) - I_n(z)}{I_n(0)} \right| = \left| 1 - \frac{I_n(z)}{I_0(z)} \right| \leq \frac{|z|^2}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

V limiti nam torej enakost (13) da

$$\frac{I_0(z/2)}{I_0(0)} = \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} = \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right)\left(1 - \frac{z^2}{3^2}\right) \cdots ,$$

kar smo želeli dokazati.

Na podoben način, s tem da bi enakost (12) uporabili na lihih indeksih, bi lahko dokazali tudi produktno formulo za kosinus

$$\cos \frac{\pi x}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(2n+1)^2}\right).$$

POGLAVJE 5

# Zaključek

V diplomskem delu smo si pogledali dve med seboj zelo povezani temi, to so neskončne vrste in neskončni produkti. Predstavili smo kar nekaj njihovih lastnosti in jih tudi dokazali. Poleg tega smo si za zaključek pogledali še zanimiv primer Wallisovega produkta, ki smo ga dokazali na tri različne načine.

Pri neskončnih vrstah smo si pogledali nekaj temeljnih lastnosti, ki so pomembne za preučevanje vrst. Nekoliko bolj smo se osredotočili na kriterije za ugotavljanje konvergentnosti. Na nekaterih primerih smo ugotovili, da osnovni kriteriji za odkrivanje konvergentnosti pogosto odpovejo, zato smo predstavili kar nekaj kriterijev, s katerimi si lahko dodatno pomagamo pri analizi konvergence. Kljub temu si pri nekaterih primerih ne moremo pomagati s kriteriji, ampak moramo konvergenco vrste dokazati z uporabo elementarne matematike.

Prepričali smo se, da so neskončne vrste pomembno predznanje pri preučevanju neskončnega produkta.

Na koncu smo predstavili še Wallisov produkt kot zanimiv primer neskončnega produkta. Pokazali smo, kako se ga lahko dokaže na več različnih načinov. Standardno se Wallisov produkt dokazuje z ocenjevanjem določenih integralov sinusne funkcije, lahko pa ga dokažemo tudi na povsem elementaren način. Pri zadnjem načinu pa smo Wallisov produkt dobili kot preprosto posledico razvoja sinusne funkcije v neskončen produkt. Razvoj sinusne funkcije v produkt je nekakšen analog osnovnega izreka algebre, kjer polinom v kompleksnem lahko zapišemo kot produkt linearnih polinomov. Čeprav se splošno s tem problemom nismo ukvarjali, naj omenim, da podoben neskončen produkt obstaja za poljubne holomorfne funkcije na domenah v kompleksni ravnini.

# Literatura


[1] Apostol, T. M., *Mathematical Analysis.* 2nd edition. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Massachusetts, 1974.

[2] Hladnik, M., *Zgodovina matematike*, FMF, Ljubljana 2013.

[3] Hyslop, J. H., *Infinite Series.* Oliver and Boyd, Edinburgh, 1954.

[4] Knopp, K., *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications, New York, 1990.

[5] Thomas, G. B.; Weir, M. D.; Hass, J. R., *Thomas' calculus*, 12th edition, Boston, 2009.

[6] Venkatachaliengar, K., Elementary Proofs of the Infinite Product for Sin Z and Allied Formulae, *The American Mathematical Monthly,* Vol. 69, No. 6 (Jun.–Jul., 1962), pp. 541–545.

[7] Vidav, I., *Višja matematika 1*, DMFA, Ljubljana, 2008.

[8] Wastlund, J., An Elementary Proof of the Wallis Product Formula for pi, *The American Mathematical Monthly,* Vol. 114, No. 10 (Dec., 2007), pp. 914–917.