Marko Razpet

Besselove funkcije kot integrali s parametrom

Študijsko gradivo

Besselovo funkcijo $J_n(x)$ celoštevilskega indeksa n lahko definiramo kot integral s parametrom x z izrazom:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\,d\phi\,.$$

Nekaj lastnosti preverimo brez težav:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)\,,\quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)\,.$$

Obe navedeni enakosti preverimo z uvedbo nove integracijske spremenljivke $\theta = \pi - \phi$. Prvo enakost preverimo takole:

$$J_n(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi + x\sin\phi)\,d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - n\theta + x\sin(\pi-\theta))\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - (n\theta - x\sin\theta))\,d\theta = (-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta = (-1)^n J_n(x)\,.$$

Drugo enakost preverimo podobno:

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-n\phi - x\sin\phi)\,d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-n\pi + n\theta - x\sin(\pi-\theta))\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos((n\theta - x\sin\theta) - n\pi)\,d\theta = (-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\,d\theta = (-1)^n J_n(x)\,.$$

Tri zaporedne Besselove funkcije $J_{n-1}(x)$, $J_n(x)$ in $J_{n+1}(x)$ povezujeta enakosti

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = 2nJ_n(x)\,,\quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)\,.$$

Preverimo ju s faktorizacijo vsote in razlike kosinusov pod integralskim znakom:

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x\sin\phi) + \cos((n+1)\phi - x\sin\phi))\,d\phi =$$

$$= \frac{2x}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\cos\phi\,d\phi = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(x\cos\phi - n)\,d\phi +$$

$$+\frac{2n}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\,d\phi = 2nJ_n(x)\,,$$

ker je predzadnji integral enak 0, kar dobimo takoj s substitucijo $u = n\phi - x\sin\phi, du = (n - x\cos\phi)\,d\phi$ v integral.

Za odvod Besselove funkcije $J_n(x)$ dobimo po pravilu za odvajanje pod integralskem znakom:

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi\,d\phi\,.$$

S tem rezultatom lahko nadaljujemo:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x\sin\phi) - \cos((n+1)\phi - x\sin\phi))\,d\phi =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi\,d\phi = J_n'(x)\,.$$

Besselova funkcija $J_n(x)$ je ena od rešitev Besselove diferencialne enačbe:

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0\,.$$

Prvi odvod že imamo. Spotoma ga še preoblikujemo z metodo per partes:

$$J_n'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi\,d\phi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(n - x\cos\phi)\cos\phi\,d\phi\,.$$

Drugi odvod dobimo iz prve oblike za prvi odvod:

$$J_n''(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\sin^2\phi\,d\phi\,.$$

Ko vse zložimo skupaj, dobimo:

$$x^2J_n''(x) + xJ_n'(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(-x^2\sin^2\phi + nx\cos\phi - x^2\cos^2\phi + x^2 - n^2)\,d\phi =$$

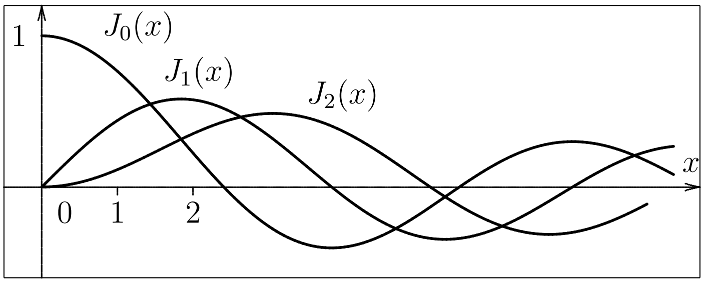
$$= \frac{n}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(x\cos\phi - n)\,d\phi = 0\,.$$

Čisto v zadnjem integralu spet uporabimo substitucijo $u = n\phi - x\sin\phi$.

Vse Besselove funkcije $J_n(x)$ imajo v točki $x = 0$ vrednost 0 razen J_0, ki ima tam vrednost 1. To lahko izrazimo s Kroneckerjevim simbolom:

$$J_n(0) = \delta_{n,0}\,.$$

Grafi prvih treh Besselovih funkcij so na sliki.



CIP - Kat176ožni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.923

RAZPET, Marko

Besselove funkcije kot integrali s parametrom [Elektronski vir] : študijsko gradivo / Marko Razpet. - Besedilni podatki. - [Domžale : samozal.], 2006

Način dostopa (URL): `http://javor.pef.uni-lj.si/~marko/matematika/bess_fun.pdf`. - Opis temelji na verziji z dne 10.02.2006

ISBN 961-6589-25-3

225020416