Marko Razpet

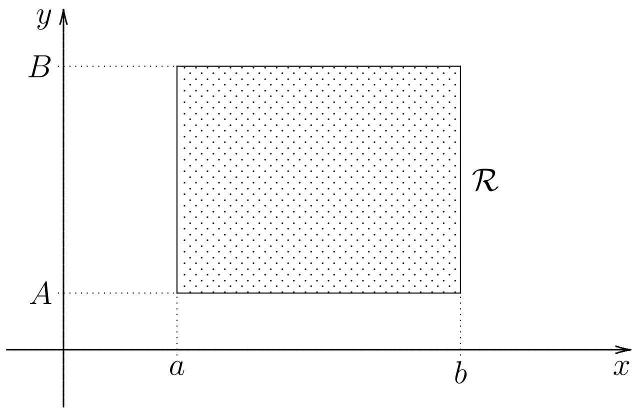
Integrali s parametrom

Študijsko gradivo

Do preklica naj pomeni

$$\mathcal{R} = [a, b] \times [A, B] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,,$$

pri čemer so a, b, A, B realna števila in $a < b$ ter $A < B$. Množica točk $\mathcal{R}$ je v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu xy pravokotnik, prikazan na sliki. Vse funkcije, nastopajoče v pričujočem besedilu, so realne.



Na pravokotniku $\mathcal{R}$ naj bo definirana funkcija $f : \mathcal{R} \mapsto \mathbb{R}$. Njeno vrednost v točki $(x, y) \in \mathcal{R}$ označimo z $f(x, y)$. Če za vsak $y \in [A, B]$ obstaja integral

$$\int_a^b f(x, y)\, dx \,,$$

obravnavamo *integral s parametrom* in v njem spremenljivko y imenujemo *parameter*. S tem imamo definirano novo funkcijo $F : [A, B] \mapsto \mathbb{R}$ s predpisom:

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx \,.$$

V nadaljevanju pomeni vselej zveznost funkcije v krajiščih intervala njeno zveznost z leve oziroma z desne strani, prav tako pa pomeni vedno odvod funkcije v krajiščih intervala njen levi oziroma desni odvod.

Osnovni trditvi

1. Če je funkcija f zvezna na pravokotniku $\mathcal{R}$, potem je funkcija F zvezna na intervalu $[A, B]$.

2. Če je funkcija f zvezna na pravokotniku $\mathcal{R}$ in ima f na $\mathcal{R}$ zvezen parcialni odvod $\partial f/\partial y$, potem je funkcija F na intervalu $[A, B]$ tudi odvedljiva in velja Leibnizovo pravilo odvajanja pod integralskim znakom:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\, dx\,.$$

Posplošitvi

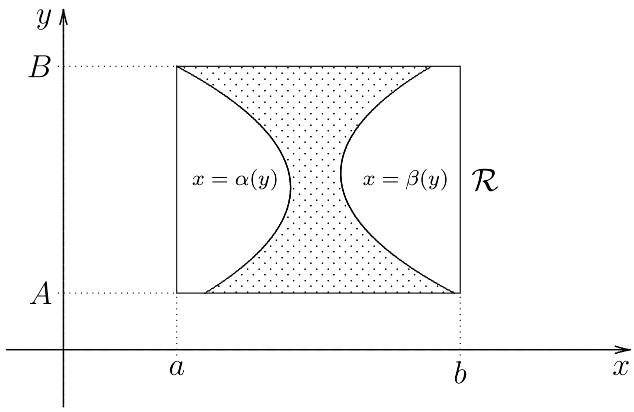
3. Če je funkcija f zvezna na pravokotniku $\mathcal{R}$, funkciji α in β pa sta zvezni na intervalu $[A, B]$, pri čemer za vsak $y \in [A, B]$ velja relacija

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b\,,$$

potem je funkcija F, definirana na intervalu $[A, B]$ s predpisom

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx\,,$$

zvezna na $[A, B]$.



4. Če je funkcija f zvezna na pravokotniku $\mathcal{R}$ in ima f na $\mathcal{R}$ zvezen parcialni odvod $\partial f/\partial y$, funkciji α in β pa sta zvezni in odvedljivi na intervalu $[A, B]$, pri čemer za vsak $y \in [A, B]$ velja relacija

$$a \leq \alpha(y) \leq \beta(y) \leq b\,,$$

potem je funkcija F, definirana na intervalu $[A, B]$ s predpisom

$$F(y) = \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx$$

odvedljiva na intervalu $[A, B]$ in velja:

$$\begin{aligned} F'(y) &= \frac{d}{dy}\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx = \\ &= \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx + f(\beta(y), y)\,\beta'(y) - f(\alpha(y), y)\,\alpha'(y)\,. \end{aligned}$$

5. Če je funkcija f zvezna na pravokotniku $\mathcal{R}$, potem sta funkciji $F : [A, B] \mapsto \mathbb{R}$ in $G : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, definirani s predpisoma

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \quad \text{in} \quad G(x) = \int_A^B f(x, y)\,dy\,,$$

integrabilni in velja enakost

$$\int_a^b G(x)\,dx = \int_A^B F(y)\,dy$$

oziroma

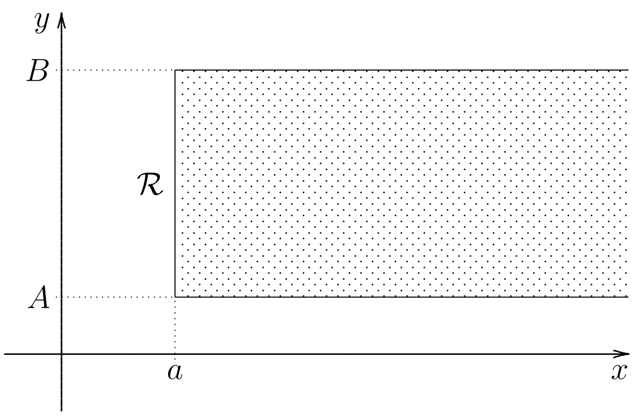
$$\int_a^b dx \int_A^B f(x,y)\,dy = \int_A^B dy \int_a^b f(x,y)\,dx\,.$$

Enakomerna konvergenca integralov

V nadaljevanju naj pomeni

$$\mathcal{R} = [a,\infty) \times [A,B] \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Množica točk $\mathcal{R}$ je tokrat v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu xy neomejen pravokotnik, prikazan na sliki.



Naj bo funkcija f definirana na neomejenem pravokotniku $\mathcal{R}$ in $I \subseteq [A,B]$.

Integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

enakomerno konvergira na množici I, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $X_0 > a$ tak, da za vsak $y \in I$ in za vsak $X \geq X_0$ velja:

$$\left|\int_X^\infty f(x,y)\,dx\right| < \varepsilon\,.$$

Weierstrassov (zadostni) pogoj

Če obstaja taka nenegativna funkcija $\varphi : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, za katero obstaja integral

$$\int_a^\infty \varphi(x)\, dx < \infty$$

in za katero je pri vsakem $x \in [a, \infty)$ in vsakem $y \in I \subseteq \mathbb{R}$ izpolnjen pogoj

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x)\,,$$

potem integral

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

enakomerno konvergira na množici I.

6. Če je funkcija f zvezna na neomejenem pravokotniku $\mathcal{R}$ in če integral

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

enakomerno konvergira na intervalu $[A, B]$, potem je funkcija $F : [A, B] \mapsto \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx\,,$$

zvezna na intervalu $[A, B]$.

7. Če je funkcija f zvezna na neomejenem pravokotniku $\mathcal{R}$ in če integral

$$\int_a^\infty f(x, y)\, dx$$

enakomerno konvergira na intervalu $[A, B]$, potem sta funkciji $F : [A, B] \mapsto \mathbb{R}$ in $G : [a, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, definirani s predpisoma

$$F(y) = \int_a^\infty f(x, y)\, dx \quad \text{in} \quad G(x) = \int_A^B f(x, y)\, dy\,,$$

integrabilni in velja enakost

$$\int_a^\infty G(x)\,dx = \int_A^B F(y)\,dy$$

oziroma

$$\int_a^\infty dx \int_A^B f(x,y)\,dy = \int_A^B dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,.$$

8. Če je funkcija f zvezna na neomejenem pravokotniku $\mathcal{R}$ in ima f na $\mathcal{R}$ zvezen parcialni odvod $\partial f/\partial y$, če integral

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx$$

konvergira za vsak $y \in [A,B]$ in če integral

$$\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx$$

enakomerno konvergira na intervalu $[A,B]$, potem je funkcija $F : [A,B] \mapsto \mathbb{R}$, ki je definirana s predpisom

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,,$$

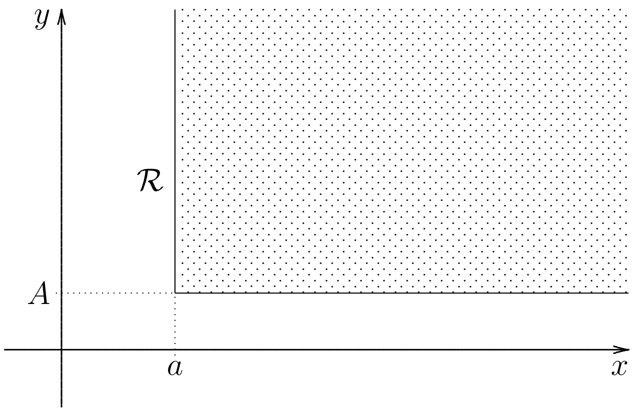
odvedljiva na intervalu $[A,B]$ in velja Leibnizovo pravilo odvajanja pod integralskim znakom:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx\,.$$

Končno naj bo

$$\mathcal{R} = [a,\infty) \times [A,\infty) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}\,.$$

Množica točk $\mathcal{R}$ je sedaj v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu xy kvadrant z vrhom v točki (a,A), kot prikazuje slika.



9. Naj bo na kvadrantu $\mathcal{R}$ definirana zvezna in pozitivna (negativna) funkcija f, integrala

$$\int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{in} \quad \int_A^\infty f(x,y)\,dy$$

pa naj enakomerno konvergirata, prvi na poltraku $[A,\infty)$, drugi pa na poltraku $[a,\infty)$. Če obstajata integrala

$$\int_a^\infty G(x)\,dx \quad \text{in} \quad \int_A^\infty F(y)\,dy$$

funkcij $F : [A,\infty) \mapsto \mathbb{R}$ in $G : [a,\infty) \mapsto \mathbb{R}$, ki sta definirani s predpisoma

$$F(y) = \int_a^\infty f(x,y)\,dx \quad \text{in} \quad G(x) = \int_A^\infty f(x,y)\,dy\,,$$

potem velja enakost

$$\int_a^\infty G(x)\,dx = \int_A^\infty F(y)\,dy$$

oziroma

$$\int_a^\infty dx \int_A^\infty f(x,y)\,dy = \int_A^\infty dy \int_a^\infty f(x,y)\,dx\,.$$

Vir

Ivan Vidav, *Višja matematika I*, DMFA, Ljubljana, 1994.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

517.38(075.8)(076)

RAZPET, Marko
Integrali s parametrom [Elektronski vir] : študijsko gradivo / Marko Razpet. - Besedilni podatki. - [Domžale :samozal.], 2006

Način dostopa (URL): `http://javor.pef.uni-lj.si/~marko/matematika/int_par.pdf`. - Opis temelji na verziji z dne 10.02.2006

ISBN 961-6589-24-5

225020160